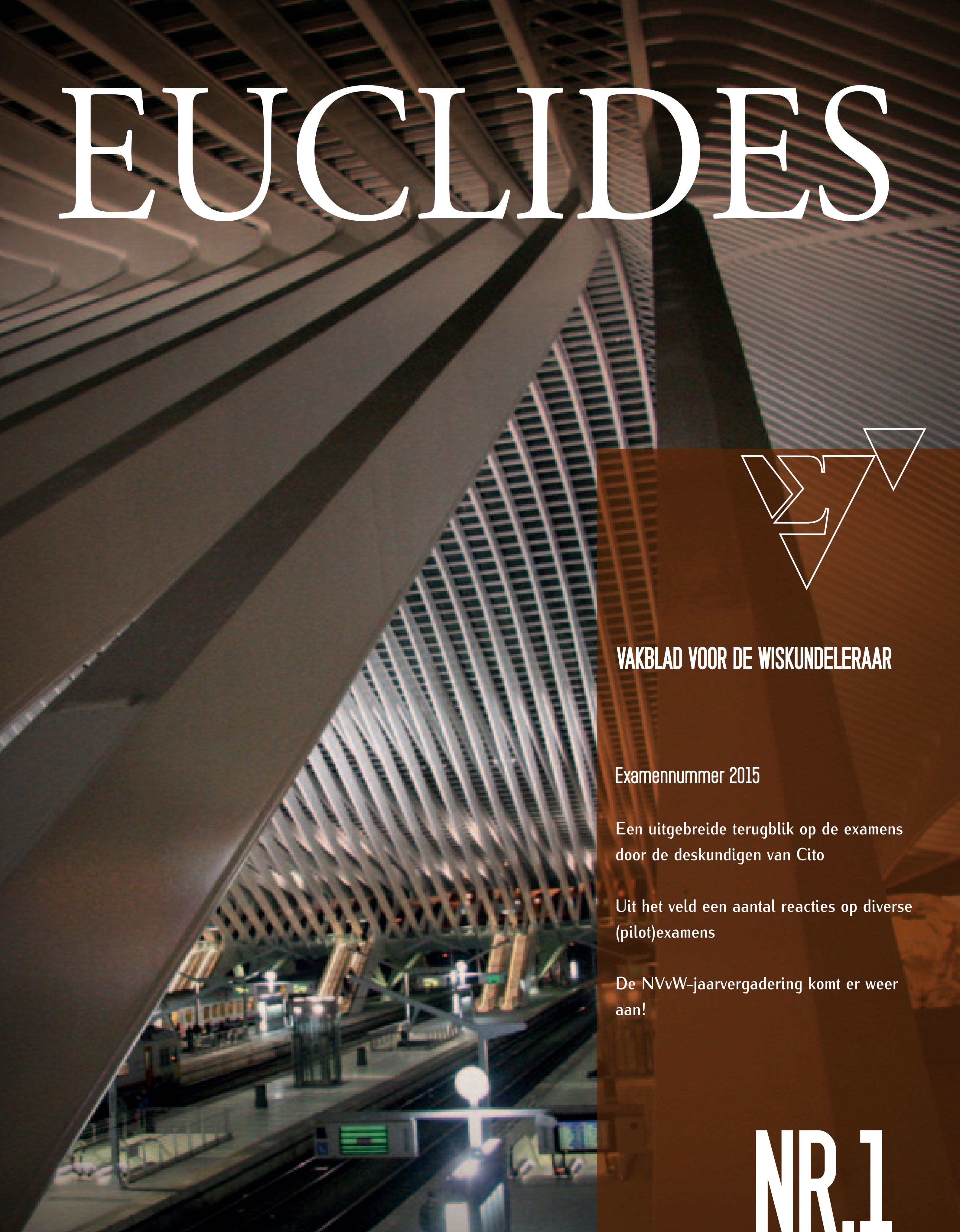
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Examennummer 2015

Een uitgebreide terugblik op de examens door de deskundigen van Cito

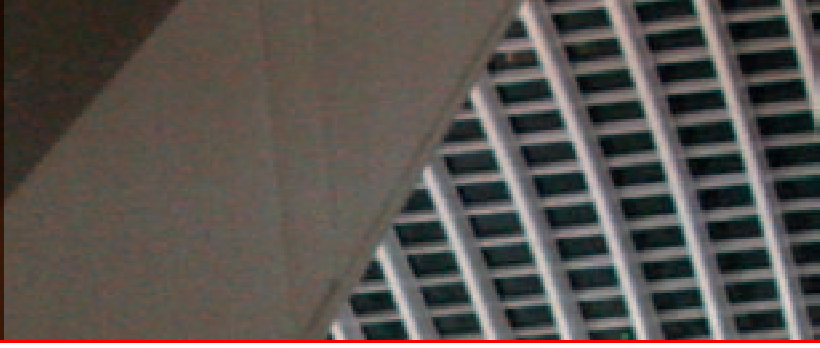
Uit het veld een aantal reacties op diverse (pilot)examens

De NVvW-jaarvergadering komt er weer aan!

NR.1

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | SEPTEMBER 2015

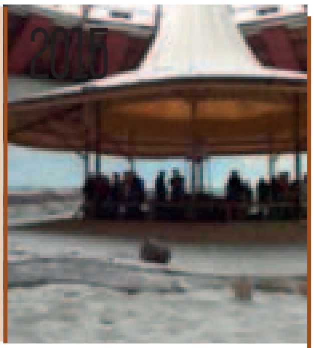


INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 1

IN DIT NUMMER

EXAMENS WISKUNDE 4
IVO CLAUS
SJOERD CRANS
GER LIMPENS
JOS REMIJN
MELANIE STEENTJES
HARCO WEEMINK



WIS EN WAARACHTIG 25

HET FIZIER GERICHT OP... 26
SUSANNE TAK
ROGIER BOS
CÉCILE KLEIJER

PILOTEXAMEN VWO WISKUNDE A 28
ERIK VAN BARNEVELD

DE WORTEL UIT EEN GEHEEL GETAL IS EEN BREUK... 31
LUUK KOENS

KLEINTJE DIDACTIEK 31
LONNEKE BOELS

GETUIGEN 32
DANNY BECKERS

VWO B-PILOTEXAMEN 34
ILONE DEKKERS

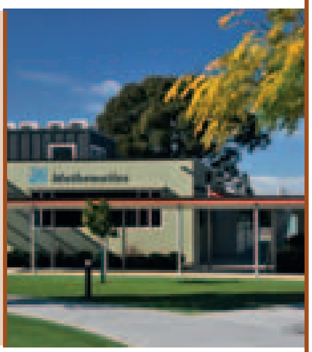
GECIJFERDHEID 39
KEES HOOGLAND



HAVO B-EXAMEN 41
GERRIE STUURMAN

VANUIT DE OUDE DOOS 44
TON LECLUSE

TEGENVOETER 47
ROLAND MEIJERINK





Station Luik Guillemins is ontworpen door de Spaanse architect Santiago Calatrava (*www.calatrava.com*). Fotograaf: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

VASTGEROEST 48
AB VAN DER ROEST

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL 49
LONNEKE BOELS

VERENIGINGSNIEUWS 51
JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2015
WISKUNDEWANDELING

RECREATIE 55

SERVICEPAGINA 58

Kort vooraf

Het aardige van de doorlooptijd van een tijdschrift is dat ik u nu vraag terug te blikken op een hopelijk geslaagde vakantie, terwijl ik tijdens het schrijven van dit stukje volop geniet van de voorpret van de komende zomer.
Dit doe ik op de dag dat de Tweede Kamer de motie Rog in behandeling neemt, over het al dan niet meetellen van de rekentoets het komend schooljaar. Ik volg het op de voet via de site van de Tweede Kamer. Enige cijfers: de motie is medeondertekend door zes Kamerleden. Op de sprekerslijst staan vijf namen, twee gebruiken hun twee minuten spreektijd. Het debat duurt van 16:40 tot 17:00 uur. Kortom, genoeg te beleven op de dag dat ik mijn eerste *Kort vooraf* schrijf.
Aangenaam, Tom Goris is de naam, uw nieuwe hoofdredacteur. Samen met eind-redacteur Marjanne Klom en de redactie hoop ik de komende jaren interessante, mooie en prikkelende edities van *Euclides* voor u te gaan maken, zoals deze.

Laten we het eens over de voorkant hebben. Opgesierd door een foto van station Luik Guillemins, een ontwerp van de beroemde Spaanse architect Santiago Calatrava. Rond het eind van deze jaargang, op 28 juli 2016, wordt hij 65. Een mooie reden om de 91ste jaargang op te sieren met enkel en alleen Calatrava foto's, in de trant van vorig jaar, toen Rinus Roelofs' werk de omslag sierde. Dus maakt u deze zomer in Valencia, Malmö, Luik, Lyon of waar dan ook foto's van een gebouw van Calatrava: stuur deze naar de redactie als u wilt dat uw foto de omslag siert!
En de motie...? Dat die verworpen is weet u waarschijnlijk wel; het gebeurde om 00:13 uur. Echt waar.

Tom Goris

EXAMENS WISKUNDE 2015

EERSTE TIJDVAK

Ivo Claus
Sjoerd Crans
Ger Limpens
Jos Remijn
Melanie Steentjes
Harco Weemink

In dit artikel geven de Cito-medewerkers een volledige analyse van de examens 2015, tijdvak 1.

Inleiding

[Ger Limpens]

Het is in *Euclides* goed gebruik om bij het begin van het nieuwe schooljaar terug te kijken naar de recente eindexamens. Wij, toetsdeskundigen wiskunde van Cito, maken graag gebruik van de ons geboden mogelijkheid en laten ook dit jaar weer de examens van de verschillende wiskundevakken de revue passeren. Sinds enkele jaren nemen we in dit overzichtsartikel echter niet meer de gegevens van de toets- en itemanalyses (TIA's) op. Dit omdat deze analyses (en dat betreft veel meer dan alleen de relevante p'-waarden)[1] op de site van Cito[2] gepubliceerd worden. Een virtueel bezoekje wordt bij deze van harte aanbevolen. U treft daar overigens ook alle examens, correctievoorschriften en door het CvTE vastgestelde N-termen aan. Wat betreft de vaststelling van die N-termen is wellicht een verwijzing naar enkele andere webpagina's ook relevant: *www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens/normering_alg* en *www.toetswijzer.nl/html/normering/default.shtm*.
De bovengenoemde TIA's vormen het uitgangspunt voor de normering en zijn daarmee van wezenlijk belang. Deze analyses kunnen echter alleen gemaakt worden dankzij de medewerking van alle aan de examencorrectie deelnemende docenten. Via WOLF[3] sturen docenten tegenwoordig niet alleen de resultaten van de eerste correctie van de eerste vijf of tien kandidaten in; het merendeel van de docenten stuurt de resultaten van alle leerlingen in. Hier past, behalve een uitdrukkelijk dankwoord aan allen die hun gegevens op deze wijze insturen, wellicht ook nog een kanttekening: ons bereiken vaker geluiden dat het niet mogelijk zou zijn om de resultaten van groepen van minder dan vijf leerlingen in te sturen. Dat is niet correct: het kost wellicht even moeite maar ook voor dergelijk kleine groepen kan WOLF gebruikt worden. Wel is het tot op heden zo dat er bij dergelijke groepen geen terugkoppeling in de vorm van een groepsrapportage plaats kan vinden. Wellicht dat dit in de nabije toekomst verandert. Een ander aan WOLF gerelateerd aspect dat wellicht ook nog eens onder de aandacht van docenten gebracht kan worden, is het volgende: bij het invullen van de leerlingresultaten in WOLF is het van belang om een verschil te maken tussen het in zijn geheel geen antwoord geven op een vraag en het wel beantwoorden van een vraag maar geen punten scoren met dat antwoord. In het eerste geval dient u een N bij de betreffende vraag van de betreffende leerling in te vullen, in het tweede een 0. Het is voor onze analyses van belang, met name in verband met het inventariseren van problemen rond de lengte van een specifiek examen, om goed in kaart gebracht te hebben hoeveel kandidaten vragen overgeslagen (dus voorzien zijn van N) hebben. En dan nog een laatste kanttekening rond WOLF en de vervaardiging van TIA's: zoals gezegd worden de TIA's gemaakt op basis van de gegevens van de eerste correctie. In die analyses (en ook in de in dit artikel vermelde gemiddelde cijfers van de diverse wiskunde-examens) is dus geen rekening gehouden met de tweede correctie.[4] Die tweede correctie zal uiteraard geen enorme veranderingen van gemiddeldes en/of percentages onvoldoende teweeg brengen maar we moeten ons hier wel bewust van zijn: onze gegevens

VMBO

Wiskunde CSE BB digitaal	16605
Wiskunde CSE BB papier	154
Wiskunde CSE KB digitaal	21207
Wiskunde CSE KB papier	3176
Wiskunde CSE GL/TL	51282
totaal	92424

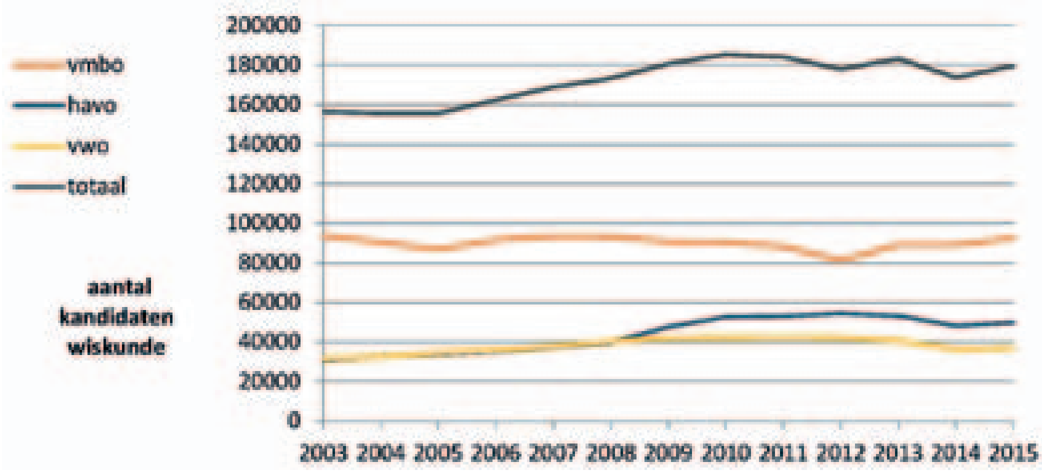
HAVO

Wiskunde A	36177
Wiskunde A pilot	209
Wiskunde B	13396
Wiskunde B pilot	136
totaal	49918

VWO

Wiskunde A	18136
Wiskunde A pilot	276
Wiskunde B	17040
Wiskunde B pilot	99
Wiskunde C	1513
Wiskunde C pilot	35
totaal	37099
totaal generaal	179441

tabel 1 Leerlingaantallen 2015



figuur 1 Aantal kandidaten wiskunde in 2003-2015

beschrijven dus niet volledig de actuele situatie. Behalve de TIA's maken we bij de evaluatie van de examens ook gebruik van de zogeheten *quick scan*. De *quick scan* is een digitaal onderzoek waarbij docenten die de resultaten van hun leerlingen via WOLF invoeren, vier vragen voorgelegd krijgen. De antwoorden op deze vier vragen (over moeilijkheidsgraad, lengte, inhoudelijke aansluiting van het examen en de waardering ervan door docenten) geven een beeld van de ontvangst van het examen. Uiteraard krijgen wij als examenmakers ook wel een beeld daarvan door de discussies tussen collega's te volgen op de diverse examenfora op de site van de NVvW. Er zit echter regelmatig nogal wat licht tussen deze twee media. Wij, examenmakers, zijn ons ervan bewust dat de discussies op de site van de Vereniging vaak gevoerd worden direct na afloop of tijdens de correctie van de examens en we zijn dan ook geneigd die discussies als soms wat te hete soep te zien die op iets langere termijn de neiging heeft om spreekwoordelijk af te koelen. En tot slot levert ook het bijwonen van examenbesprekingen, georganiseerd door de Vereniging, het een en ander op aan wat meegenomen kan worden in de evaluatie van de examens. We hebben er alle begrip voor dat het organiseren van regionale besprekingen niet zo realistisch meer is in dit digitale tijdperk maar we hopen dat die centrale besprekingen wel nog een lang leven beschoren zijn. Opmerkingen van docenten over de examens en het correctievoorschrift op de examenbesprekingen en op internetfora worden zeer zorgvuldig bekeken. Alleen de vragen die bij het examenloket worden gemeld (*www.examenloket.nl*), worden formeel door het CvTE beantwoord en kunnen zo nodig tot een officiële aanvulling op het correctievoorschrift leiden of tot een aanpassing van de N-term. Cito en het CvTE analyseren de aard en omvang van de opmerkingen van docenten grondig met het oog op mogelijke aanpassingen in de toekomstige examenopgaven of correctievoorschriften.

Ook dit jaar geven we een overzicht van het aantal leerlingen dat deelgenomen heeft aan de verschillende wiskunde-examens. Zie daarvoor tabel 1. Zoals in die tabel te zien is, wordt het overgrote deel van de kandidaten uit vmbo BB en KB tegenwoordig via computerexamens (CBT) getoetst. In figuur 1 treft u grafieken aan die de diverse aantallen[5] kandidaten die op de een of andere wijze een wiskunde-examen hebben afgelegd, tonen.

We zijn ons er heel erg van bewust dat we onze constructiegroepsleden, de leden van de vaststellingscommissies van het CvTE, alle collega's die onze concepten van verstandige kanttekeningen voorzien en ook de collega's die de examenbesprekingen bezoeken, hard nodig hebben om de examens te optimaliseren. Dank dus daarvoor allen.

VMBO BB-KB-GL/TL

Computerexamens BB en KB

De computerexamens BB en KB zijn dit jaar voor het laatst met behulp van het programma *Examentester* afgenomen. In dit artikel wordt van elk examen één variant besproken. Op de Cito-website[6] staan de pdf-versies van deze varianten. Deze zullen in het najaar van 2015 als voorbeeldexamen worden gepubliceerd op de DUO-website.[7] De examens zijn dan omgezet naar het nieuwe computerexamensysteem *Facet*. Hiermee kan iedereen het examen op internet bekijken en maken. Alle interactieve applicaties zijn beschikbaar, dus ook buitenstaanders kunnen zo een helder beeld van de computerexamens wiskunde BB en KB krijgen.

BB Computerexamen

[Melanie Steentjes]

In totaal zijn de resultaten van 12415 leerlingen binnengekomen. Het examen kent verschillende varianten.
De opgaven die hier besproken worden, zijn door een beperkt deel van deze leerlingen gemaakt.

De variant die we hier bespreken, begon met de context *Kaarsen* waarin een wortelverband gegeven werd. Leerlingen moesten de lengte van de kaars bij verschillende brandtijden berekenen en ook de bijbehorende grafiek tekenen. Er kwam aardig wat kritiek op deze opgave. Er waren verschillende docenten die aangaven dat leerlingen niet of nauwelijks met wortels oefenden in de methode en deze vragen dus niet konden maken. In de syllabus staat echter bij het onderdeel Rekenen, meten en schatten (WI/K/5): 'de kandidaat kan met een rekenmachine breuken, procenten, machten en wortels berekenen of benaderen als eindige decimale getallen.' Bij het onderdeel Algebraïsche verbanden (WI/K/4) staat verder: 'de kandidaat kan in een gegeven assenstelsel een grafiek tekenen van het verband tussen variabelen in een gegeven situatie.' De examenmakers waren om deze redenen van mening dat de vragen gesteld mochten worden. De leerlingen konden in het algemeen ook aardig uit de voeten met deze opgave: er werd een gemiddelde p'-waarde van 63 bij deze context behaald. Bij *Betuwelijn* moest er gerekend worden met hoeveelheden ijzererts en gemiddelde snelheid. Opvallend is dat deze vragen goed discrimineerden. Dat betekent dat leerlingen die goed scoorden op de vragen bij deze context ook goed scoorden op het gehele examen. In de context *IJsselmeertocht* werden verschillende vragen over koershoeken gesteld. Er moest onder andere een koershoek opgemeten worden met een digitale gradenboog. Opvallend is de lage score bij vraag 11 waar leerlingen moeten uitleggen hoeveel graden de koershoek is van een schip dat in tegenovergestelde richting vaart: 66% van de leerlingen behaalde geen enkel punt en de vraag had een p'-waarde van 29.

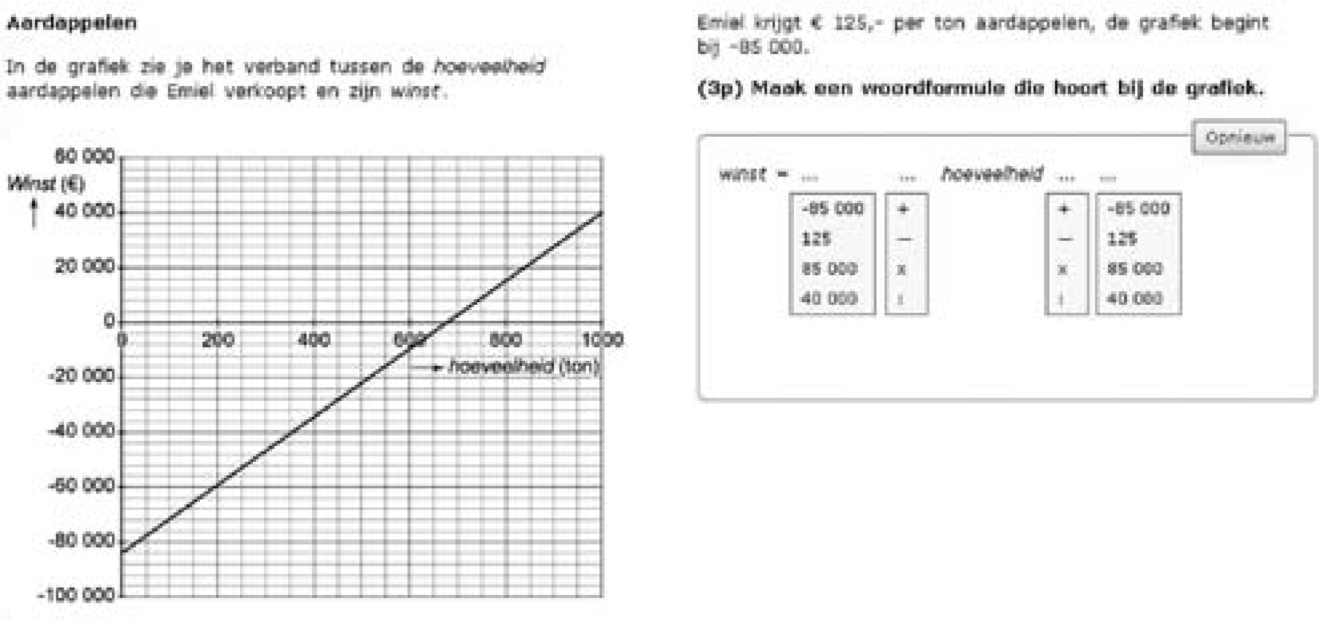
Ook bij de eerste vraag van *Aardappelen* scoorden veel leerlingen geen punten (47%). Het ging bij deze vraag om het omrekenen van 800 ton naar kg. Een kennisvraag waar bijna de helft van de leerlingen dus de mist in ging. Bij vraag 16 moesten leerlingen zelf de woordformule construeren die hoorde bij de lineaire grafiek met behulp van een *Flash*-applicatie, zie figuur 2. Dit ging best goed, getuige de p'-waarde van 55.
Rekenen met euro's was de eenvoudigste context van deze variant met een gemiddelde p'-waarde van 66. Ook het rekenen met procenten (vraag 21) ging de leerlingen goed af (p'-waarde van 75). De variant sloot af met *Glas in lood*. Bij vraag 22 en 23 moest gewerkt worden met symmetrie. Respectievelijk 73% en 58% van de leerlingen haalde hier geen enkel punt. Ook bij het rekenen met oppervlaktes in vraag 24 en 25 scoorden leerlingen niet hoog met p'-waardes van 44 en 35. Met een gemiddelde p'-waarde van 38 was dit een erg lastige afsluiter. De door het CvTE vastgestelde N-termen resulteerden in een gemiddeld cijfer van 6,8 met 18,9% onvoldoendes.

KB Computerexamen

[**Jos Remijn**]

In totaal zijn de resultaten van 13729 leerlingen binnengekomen. Deze leerlingen hebben verschillende varianten gemaakt. Ook hier geldt weer dat de opgaven die hier besproken worden, slechts door een beperkt deel van deze leerlingen gemaakt zijn. De door het CvTE vastgestelde N-termen resulteerden in een gemiddeld cijfer van 6,5 met 24,4% onvoldoendes.

De voorliggende variant begon met de opgave *Gasverbruik*. Hierin moest worden onderzocht na hoeveel



figuur 2 Uit: vmbo BB cbt (Aardappelen)



Panorama Mesdag

Panorama Mesdag is een cilindervormig schilderij. De toeschouwer staat in het midden op een platform en het schilderij is rondom geplaatst.

Zie het bovenaanzicht en de foto.
Het platform is in het bovenaanzicht grijs gekleurd en het schilderij rood.

In het bovenaanzicht is het schilderij rood gekleurd. Met punt *M* is het midden van de cirkel aangegeven. Hier staat Marten.
Het schilderij is 120 meter lang en 14 meter hoog.

(3p) Bereken de afstand van Marten tot het schilderij.
Typ je berekening in.

3

figuur 3 Uit: vmbo KB cbt (Panorama Mesdag)

jaar de investering in dubbel glas was terugverdiend. Bij de eerste vraag moest worden gerekend met procenten. Misschien gaven de grote getallen (miljoenen) hier problemen, want maar liefst 34% behaalde hier geen enkel punt. Bij de vraag wat voordeliger is: van een bedrag eerst 20% korting afhalen en dan 21% btw erbij tellen óf eerst de btw erbij tellen en dan pas de 20% korting eraf halen was de p'-waarde 60: niet slecht voor deze lastige vraag. Bij de opgave *Goten* werd gevraagd een tabel in te vullen en de grafiek te tekenen bij een kwadratisch verband. De p'-waarde was 82, maar opvallend was dat maar liefst 44% van de leerlingen hier één punt (van de vier) liet liggen. Dit zou kunnen worden veroorzaakt door het feit dat leerlingen ook dit jaar nog moeite hebben met het (digitaal) tekenen van een kromme. Het is van belang dat leerlingen met deze functionaliteit hebben geoefend. We hopen dat dit vanaf komend jaar, als dit examen op het internet vrij beschikbaar is, tot minder problemen zal leiden.
Bij de opgave *Panorama Mesdag*, zie figuur 3, leek het erop dat de ruimtelijke situatie voor veel leerlingen niet duidelijk was. Bij de vraag wat de afstand van Marten tot het schilderij is, een vraag die neerkwam op het berekenen van de straal van een cirkel bij een gegeven omtrek, was de p'-waarde slechts 23 en 68% van de leerlingen behaalde hier geen enkel punt. Bij de opgave *Visvijvers* moest de grafiek van een rechte lijn worden getekend. Dit leverde gezien de p'-waarde van 87 niet veel problemen op. De meetkundige opgave *Rollende dobbelsteen* bleek lastig. Met name bij het tekenen van het 'rechter zijaanzicht' werden weinig punten behaald. Het examen sloot af met de opgave *Plantenpiramide*. Meetkundige opgaven blijven, zo blijkt ook dit jaar, bij de KB-leerlingen voor problemen zorgen. De vraag waarin met behulp van de stelling van Pythagoras de hoogte van de piramide moest worden berekend, scoorde met p'-waarde 41 niet hoog.

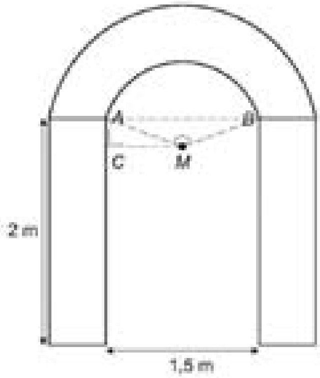
VMBO KB-GL/TL

[Melanie Steentjes]
Steeds meer leerlingen bij vmbo kaderberoeps (KB) doen hun examen op de computer en dus steeds minder op papier. We starten hier met het papieren examen wiskunde voor de gemengde leerweg/theoretische leerweg (GL/TL).

GL/TL

Dit jaar waren er bij de examenbespreking helaas maar vier docenten aanwezig. De examenbespreking wordt georganiseerd door de Vereniging en bij deze





De twee pilaren zijn 2 meter hoog. Het punt *M* ligt op een hoogte van 1,75 meter en op gelijke afstand van de punten *A* en *B*. Voor de duidelijkheid is er een aantal hulplijntjes getekend.

De boog *AB* is een deel van een cirkel met middelpunt *M* en straal *AM*.

4p 19 Bereken hoeveel graden hoek *M* in driehoek *AMB* is. Schrijf je berekening op. Rond je antwoord af op een geheel getal.

figuur 4 Uit: vmbo GL/TL (Poort)

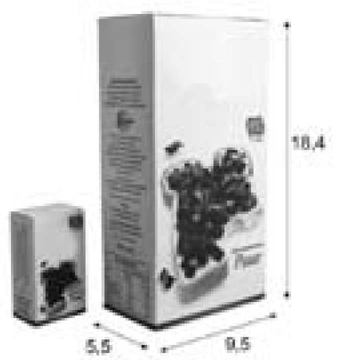
bespreking wordt vooral ingezoomd op het correctievoorschrift en hoe om te gaan met afwijkende antwoorden van leerlingen. Vanuit Cito en het CvTE proberen we altijd aanwezig te zijn om signalen op te vangen en te gebruiken voor de constructie van de examens van komende jaren. We hopen dat er volgend jaar weer meer docenten aanwezig zullen zijn.
De *quick scan* werd ingevuld door 1510 docenten. Men gaf het examen een gemiddeld cijfer van 6,8, iets hoger dan vorig jaar. Het grootste deel (61%) van de docenten vond de moeilijkheidsgraad van het examen in orde, 16% van de docenten vond het examen moeilijk tegenover 19% van de docenten die aangaf het examen juist makkelijk te vinden. Daarnaast vond 86% van de docenten het examen van precies de goede lengte en 12% vond het examen te lang. De inhoudelijke aansluiting bij het gegeven onderwijs vond men voldoende (48%) tot goed (39%). Opvallend is wellicht dat de cijfers nauwelijks afwijken van de cijfers van vorig jaar. Op de examenbespreking werd gezegd dat de startopgave *Snelheid van het geluid* niet zo prettig was, en dan ging het met name om de eerste vraag waarin met snelheid gerekend moest worden. Sommige leerlingen vonden dat lastig en hadden daarmee geen prettige start. Toch vielen de resultaten mee getuige de p'-waarde van 68. Bij vraag 4 moest beredeneerd worden waarom de grafiek (wortelverband) geen rechte lijn kon zijn. Zoals vaker bij redeneervragen kwamen hier de meest uiteenlopende antwoorden, waarbij het soms lastig was om te bepalen hoeveel scorepunten een antwoord waard was. Maar liefst 43% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. Net als de vorige context was ook de context *Huizenprijs* overlap met het papieren KB-examen (met uitzondering van vraag 8). De vragen 5 en 6 scoorden heel hoog met gemiddelde p'-waarden van respectievelijk 82 en 86. Bij vraag 7 moest berekend worden wanneer de gemiddelde huizenprijs van Duitsland hoger was dan die van Nederland. De grafiek van de huizenprijs van Duitsland was gegeven op de uitwerkbijlage. Voor Nederland wist de leerling de prijs aan het begin van de periode en de jaarlijkse stijging (bij benadering een lineair verband). Een methode die gegeven was in het correctievoorschrift was het tekenen van de grafiek van Nederland en met behulp van die grafiek het jaar aflezen. De grafiek van Nederland hoefde echter niet getekend te worden, een andere vakinhoudelijk juiste manier was bijvoorbeeld het berekenen van de huizenprijs in Nederland bij verschillende jaren waarna afgelezen kon worden in de grafiek wanneer de huizenprijs in Nederland voor het eerst hoger was. Omdat deze tweede mogelijkheid niet in het correctievoorschrift gegeven was en er veel vragen over binnenkwamen bij het CvTE is besloten tot een aanvulling op het correctievoorschrift. Bij vraag 8 moest gerekend worden met een groeifactor, maar dat ging boven verwachting goed met een p'-waarde van 58.
De context *Prisma* was een kale meetkundige context. Het correctievoorschrift bij vraag 10 waarin een bovenaanzicht getekend moest worden, was niet helemaal gelukkig. Een leerling die bijvoorbeeld bij hoek *L* geen rechte hoek tekende, kreeg toch nog 2 van de 3 scorepunten als hij de schaalberekening goed had gedaan. Dat had, bij nader inzien, wel wat minder mogen zijn. Bij vraag 11 moest de inhoud van het prisma berekend worden. Een mooie vraag, maar er waren vele wegen die naar Rome leidden, dus deze vraag was lastig nakijken.

De vraag discrimineerde echter heel mooi tussen vaardige en minder vaardige leerlingen, net als vraag 12 waarin met een dubbele Pythagoras gerekend moest worden. Op de context *Halveringstijd* kwam aardig wat kritiek. Het was een atypische context, waarvan de examenmakers echter het idee hadden dat het wel een context was waar een GL/TL-leerling mee uit de voeten moest kunnen. De vragen waren ook niet lastig, maar er waren leerlingen die struikelden over de namen van de stoffen (bijvoorbeeld jodium-123 en plutonium-239). Met een gemiddelde p'-waarde van 67 deed deze context het niet slecht. Wel bleek er bij nadere beschouwing een behoorlijk verschil te zijn tussen jongens en meisjes: jongens scoorden een gemiddelde van 75 en meisjes 58. Als we naar voorgaande jaren kijken, scoren jongens altijd wel iets beter dan meisjes, maar dat verschil is meestal rond de 4 p'-punten. Hier is dat dus behoorlijk veel hoger (17). Waarschijnlijk ligt het aan het gegeven dat jongens vaker nask hebben dan meisjes en zich wellicht minder van de wijs lieten brengen door de scheikundige namen. Het is wel iets wat de examenmakers in de gaten moeten blijven houden, want zo'n groot verschil is niet wenselijk. Bij *Poort* moest gerekend worden met Pythagoras, goniometrie en de omtrek van een cirkel. Een echt meetkundige context die het lastigste bleek van het hele examen. Bij vraag 19, zie figuur 4, moest hoek *M* berekend worden met behulp van de tangens. Leerlingen moesten zelf bedenken dat ze eerst de halve hoek moesten berekenen of via driehoek *AMC* moesten werken. Dit bleek lastig: 41% van de leerlingen scoorde geen enkel punt. Het examen sloot af met *Bouwkavel* (vraag 22 en 23 waren overlap met KB). Dit bleek de best gemaakte context van het hele examen te zijn. Een mooie afsluiting, maar de context had ook niet misstaan aan het begin van het examen. De leerlingen bleken dit jaar uitzonderlijk goed gescoord te hebben. De N-term voor dit examen werd door het CvTE vastgesteld op 1,0. Dat resulteerde in een examen met 16,6% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,9.

KB

Op het papieren KB-examen is weinig feedback gekomen. Er is geen *quick scan* en ook op het forum waren bijna geen reacties. We hebben de resultaten van 2604 leerlingen ontvangen, dus het examen is nog wel door een behoorlijk aantal leerlingen gemaakt.
Het examen begon met de opgave *Flesvoeding*, een zeer eenvoudige startopgave. Er moest gerekend worden aan de hand van een vuistregel voor het aantal ml flesvoeding dat een baby met een bepaald gewicht nodig heeft. Bij de context *Bouwkavel* waren vraag 6 en vraag 7 overlap met GL/TL. Bij GL/TL werd bij de eerste vraag direct naar de breedte van kavel 2 gevraagd. Bij KB is er voor gekozen om deze vraag in tweeën te splitsen waarbij bij vraag 4 eerst de omrekening van de prijs naar vierkante meter grond werd gevraagd en vervolgens in vraag 5 naar de breedte. Het oplossingsproces is dus bij KB wat meer gestructureerd aangeboden.
De p'-waarden waren aan de hoge kant, wellicht had de GL/TL-variant ook in het KB-examen niet misstaan.
Ook *Huizenprijs* was grotendeels overlap met GL/TL. Alleen bij de laatste vraag werd de exponentiële formule gegeven waar de GL/TL-leerlingen zelf de groeifactor moesten bedenken. De eenvoudigere variant bleek een prima keuze voor KB te zijn. Deze vraag scoorde nu goed met een p'-waarde van 60. Bij *Kleine doosjes broodbeleg* werden kleine verpakkingen hagelslag vergeleken met een normale verpakking. De vragen bij deze context discrimineerden heel mooi, iets dat je vaker ziet bij meetkundige contexten. Bij vraag 13 moest de leerling laten zien dat er 656,5 cm^2 karton nodig was bij de normale verpakking, zie figuur 5. Opvallend is dat

Een normale verpakking broodbeleg is 9,5 cm lang, 5,5 cm breed en 18,4 cm hoog.

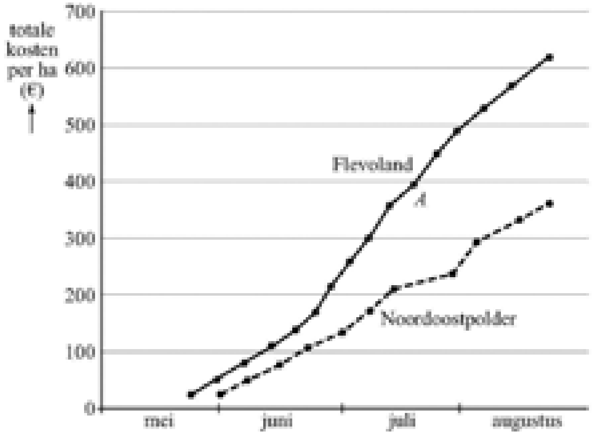


4p 13 Laat met een berekening zien dat voor de normale verpakking 656,5 cm^2 karton nodig is als je geen rekening houdt met de plakrandjes.

figuur 5 Uit: vmbo KB (Kleine doosjes broodbeleg)

Boer Jacobs is een niet-biologische boer. Hij heeft twee stukken akkerland waarop hij aardappels verbouwt, één in de Noordoostpolder en één in (Zuidelijk) Flevoland. In de figuur zie je een overzicht van het gifgebruik van Jacobs in het jaar 2007 voor beide akkers. Elk punt in de figuur geeft een bespuiting met gif aan. Het punt A hoort bijvoorbeeld bij de elfde bespuiting van het seizoen in Flevoland. In de figuur kun je zien dat de totale kosten per ha van alle bespuitingen tot en met deze bespuiting bijna 400 euro zijn.

figuur



Boer Jacobs zegt dat hij in 2007 op zijn akker in Flevoland niet alleen vaker moest spuiten dan in de Noordoostpolder, maar dat ook de gemiddelde kosten per ha per bespuiting hoger waren.

4p 2 Onderzoek of hij gelijk heeft met beide uitspraken.

figuur 6 Uit: havo A (Gifgebruik in de landbouw)

44% van de leerlingen hier geen enkel punt haalde en 51% van de leerlingen alle punten. Leerlingen wisten hoe je het aan moest pakken (en haalden dan direct alle punten) of niet (en scoorden helemaal niets). *Snelheid van het geluid* was in zijn geheel overlap met GL/TL. KB-leerlingen scoorden hier beduidend minder goed dan GL/TL-leerlingen. Alleen vraag 17, waarin een getal in het wortelverband ingevuld moet worden, ging ook bij de KB-leerlingen erg goed met een p'-waarde van 90. Bij de laatste vraag, waarin beredeneerd moest worden waarom de grafiek van een wortelverband geen rechte lijn kon zijn, scoorde maar liefst 62% van de leerlingen geen enkel punt. De context *Loopband* was bedoeld als een redelijke standaardopgave waarbij in een rechthoekige driehoek gerekend moest worden met behulp van goniometrie en de Stelling van Pythagoras. In het examen van 2011 stond een zeer vergelijkbare context (*Vliegen als een vogel*). Vraag 21 (Stelling van Pythagoras) en vraag 22 (hoek berekenen met behulp van goniometrie) uit het examen van 2015 komen behoorlijk overeen met respectievelijk vraag 22 en 23 uit het examen van 2011. Er is echter een groot verschil in de p'-waarden: 43 en 43 in 2011 tegenover 53 en 59 in 2015. Leerlingen lijken hier dus een stuk vaardiger in geworden te zijn! Het examen sloot af met *Temperatuur aquarium* waarin een periodiek verband aan de orde kwam. Leerlingen wisten hier wel raad mee en het was een prettige afsluiter met een gemiddelde p'-waarde van 62. Ook bij KB bleken de leerlingen het goed gedaan te hebben. De N-term voor dit examen werd door het CvTE vastgesteld op 1,0. Dat resulteerde in een examen met 24,9% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,5.

HAVO A

[**Jos Remijn**]

Zoals gebruikelijk maakte het examen havo wiskunde A ook dit jaar weer veel reacties los. Op het forum werden maar liefst 580 bijdragen van docenten geteld. Veel discussie over kleine probleempjes bij het corrigeren, maar ook fundamentele verschillen in opvatting. De landelijke examenbespreking werd door slechts elf docenten bezocht; hopelijk worden in de toekomst weer regionale besprekingen georganiseerd. In de *quick scan* in WOLF, ingevuld door 915 docenten, bleek dat de meeste docenten het examen van een goed niveau vonden, een derde deel vond het moeilijk. Bij de analyse van het examen bleek dat dit examen op het juiste niveau zat. Er is geen effect aan het licht gekomen van de nieuwe vakspecifieke regel, waarin wordt aangegeven dat notatiefouten in de beantwoording niet meer aangerekend moeten worden. Dit alles bracht het CvTE ertoe de N-term te bepalen op 1,0 wat leidde tot een

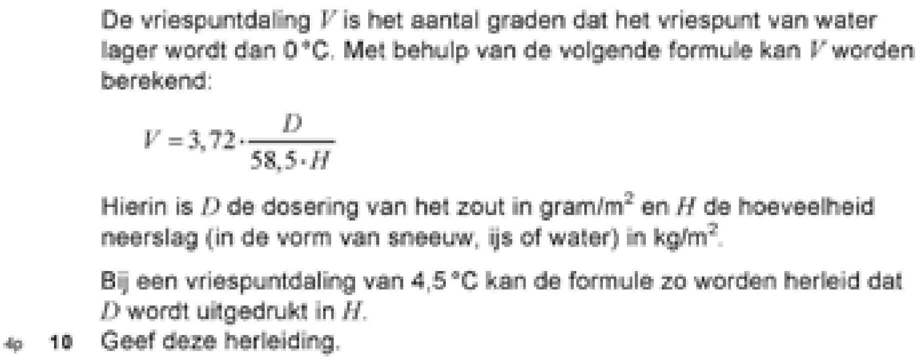
gemiddeld cijfer van 6,4 en 24,6% onvoldoendes. Voor de C&M-kandidaten (in de steekproef zo'n 10% van de kandidaten) blijft het vak wiskunde A lastig, zij kregen een gemiddeld cijfer van slechts 5,7 met 44,3% onvoldoendes.
Het examen telde 22 vragen, verdeeld over vijf opgaven. In de eerste opgave *Gifgebruik in de landbouw* werd gestart met een redelijke standaardvraag waarin lineaire extrapolatie kon worden gebruikt. Daarna was een figuur met gegevens over de bespuitingen in het jaar 2007 op twee verschillende percelen gegeven, zie figuur 6. Met behulp van deze figuur moest worden onderzocht of de twee uitspraken van boer Jacobs juist waren. Ondanks de afleesvoorbeelden in de tekst boven de figuur bleken er toch allerlei interpretatieproblemen bij de kandidaten (en de docenten op het forum) te zijn. Zo bleek het niet duidelijk te zijn dat het hier ging om alle bespuitingen in het jaar 2007. Dit begripsprobleem deed zich ook voor bij de discussie over vraag 4. Daar werd vermeld dat het aantal hectaren waarop aardappelen biologisch geteeld worden vanaf 2007 exponentieel toeneemt. Er moest worden berekend in welk jaar dit voor het eerst meer dan 10% is van het totaal aantal hectaren waarop aardappelen worden geteeld. Het ging hier om een discrete variabele, maar dit was niet bij iedereen even duidelijk. Dit leidde tot verhitte discussie, waarbij zelfs docenten het voornemen uitspraken het foute antwoord 2026 goed te zullen rekenen. Op een formele vraag hierover op de Examenlijn aan het CvTE kwam het antwoord dat hier uitsluitend het antwoord 2027 juist is. In de volgende opgave *Zout strooien* werden twee vragen gesteld die met behulp van de normale verdeling opgelost moesten worden. Dit gaf niet veel problemen bij de kandidaten. De laatste vraag van deze opgave, zie figuur 7, bleek met p'-waarde 29 de moeilijkste vraag van het examen. Maar liefst 76% van de kandidaten behaalde hier slechts 0 of 1 punt (van de vier). In het nieuwe programma dat vanaf examenjaar 2017 zal gelden, zullen deze algebraïsche vaardigheden nog iets nadrukkelijker aan de orde komen. Het examen vervolgde met de opgave *Profielwerkstukpresentaties*. Vraag 12 leidde, zoals gebruikelijk bij combinatorische vragen, tot een matige score van p' = 45. Over de twee laatste vragen van deze opgave was ook veel discussie op het forum. Dit had te maken met de volgens velen wat onduidelijke formulering van de situatie. Bij vraag 14 was een erratumblad geleverd, maar het bleef onduidelijk of hiermee de situatie was verduidelijkt. De opgave *Sociaal Netwerk* gaf minder problemen. Door sommige docenten werd gevraagd of het laatste deel van de opgave wel binnen het examenprogramma paste. Weliswaar bevatte de gegeven formule een exponentieel deel, maar specifieke kennis van het gedrag van de exponentiële functie was voor de beantwoording van de vragen niet vereist. De afsluitende opgave *Lingo* behandelde een vereenvoudigde versie van het spelletje dat tot vorig jaar op televisie werd uitgezonden. De resultaten waren hier redelijk, maar de laatste vraag haalde slechts een p'-waarde van 36. De combinatie van kansberekening en spelregels van Lingo maakte deze vraag lastig.

HAVO A pilot

[**Jos Remijn**]

Dit jaar is het pilotexamen voor het laatst afgenomen volgens het experimentele examenprogramma. In 2016, een jaar eerder dan de rest van Nederland, zullen de pilotscholen het eerste examen afnemen volgens het nieuwe examenprogramma, dus met statistiek in het CE. Het pilotexamen is dit jaar gemaakt door in totaal 173 kandidaten. Ook hier werd door het CvTE de N-term bepaald op 1,0. Dit leverde 20,8% onvoldoendes op.

Uit zowel de *quick scan* als de centrale examenbespreking bleek dat de pilotdocenten dit examen als een goed pilotexamen beschouwden. Het gemiddelde waarderingscijfer was 7,6 en de inhoudelijke aansluiting op het onderwijs werd unaniem met 'goed' beoordeeld. Als opvallend punt werd genoemd dat de algebraïsch getinte vragen dit jaar door veel meer leerlingen dan in eerdere jaren werden aangepakt en niet overgeslagen.



De vriespuntdaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0 °C. Met behulp van de volgende formule kan V worden berekend:

$$V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$$

Hierin is D de dosering van het zout in gram/m^2 en H de hoeveelheid neerslag (in de vorm van sneeuw, ijs of water) in kg/m^2.

Bij een vriespuntdaling van 4,5 °C kan de formule zo worden herleid dat D wordt uitgedrukt in H.

4p 10 Geef deze herleiding.

figuur 7 Uit: havo A (Zout strooien)

Dit examen startte net als het reguliere examen met de opgave *Gifgebruik in de aardappelteelt*. Hierna kwam de opgave *Zout strooien*, die vanwege het pilotprogramma was aangepast. De vraagstelling bij vraag 6, zie figuur 8, werd door de pilotdocenten en de leerlingen gewaardeerd. Door het gebruik van puntjes in plaats van een letter, werd de vraag voor veel leerlingen bereikbaar. De p'-waarde van 64 geeft dit ook weer. Vraag 8 was gelijk aan vraag 10 van het reguliere examen. De pilotkandidaten presteerden hier met een p'-waarde van 44 duidelijk beter dan de reguliere kandidaten. De derde opgave *Inhalen* zag er aantrekkelijk uit, omdat er twee lineaire formules werden getoond. Toch leverde het omgaan hiermee de nodige problemen. De laatste vraag van deze opgave bleek te hoog gegrepen. Met een p'-waarde van 5 kan worden geconcludeerd dat bijna geen enkele kandidaat wist hoe dit probleem moest worden aangepakt. De opgave *Sociaal netwerk* was nagenoeg gelijk aan de opgave in het reguliere examen. Dat gold niet voor de opgave *IBAN*, die volledig aan het subdomein *Combinatoriek* was gewijd. De vragen werden door de pilotdocenten gewaardeerd, zeker de laatste vraag waar wat verder moest worden doorgedacht om de aanpak te doorgronden. De resultaten waren bij deze opgave niet zo heel hoog. Het pilotexamen werd traditioneel afgesloten met de korte onderzoeksopgave, een complexe context waarover slechts één vraag gesteld wordt. Dit jaar was het thema *Wat kost die auto?* Een opgave waarin moest worden onderzocht of een te koop staande auto wel of niet betaalbaar is. Er waren op de pilotscholen kandidaten die deze opgave als eerste hebben gemaakt. Niet onbegrijpelijk, want er waren voldoende aanknopingspunten om te kunnen starten met deze opgave van 8 punten. De p'-waarde van 70 laat dit ook zien. Zoals eerder gepubliceerd, zullen de examens volgens het nieuwe programma altijd met een korte onderzoeksopgave worden afgesloten.

HAVO B

[**Sjoerd Crans**]

Het havo wiskunde B-examen van 2015 werd geplaagd door enkele kleine en iets minder kleine onvolkomenheden. Hierover is op het forum uitgebreid gediscussieerd en er is een aantal klachten ingediend via de Examenlijn. Nu is dit artikel niet de plek om op deze discussies en klachten in te gaan. We volstaan met de opmerkingen dat hieruit blijkt dat bij Cito en bij het CvTE echte mensen werken en dat alle bij dit werk betrokkenen hadden gewenst dat zij deze onvolkomenheden hadden (kunnen) voorkomen. Inhoudelijk werd dit examen door het veld als nogal makkelijk maar ook enigszins onevenwichtig beoordeeld. Dit laatste omdat een aantal bekende onderwerpen ontbrak en er vrij veel differentiëren in zat. De ruwe cijfers geven wellicht ook aanleiding tot het oordeel 'makkelijk en enigszins onevenwichtig': 9 van de 19 opgaven hadden een p'-waarde van (ruim) boven de 75, en slechts 2 een p'-waarde onder de 40. Het lijkt erop dat de huidige havo wiskunde B-leerlingen de standaardopgaven prima kunnen, maar dat als het van de gebaande paden af gaat ze al snel op dun ijs staan of daar doorheen zakken. De *quick scan*, ingevuld door 485 docenten, gaf aan dat dit een '*middle-of-the-road*'-examen was: een goede moeilijkheidsgraad, een goede lengte en een behoorlijke aansluiting op het gegeven onderwijs. Dit examen kreeg van docenten een gemiddeld cijfer van 6,6, iets hoger dan in 2014. De normering van dit examen, die begint met de ruwe cijfers van de TIA en waarbij allerlei andere gegevens een rol spelen, leidde uiteindelijk tot een N-term van 1,2. Op basis van de WOLF-gegevens komt bij deze N-term het percentage onvoldoende uit op een historisch lage 13,9%, bij een historisch hoog gemiddeld cijfer van 7,0.

De eerste opgave van het examen ging over een hangar met een paraboolvorm. Aan deze parabool moest gerekend worden. Bij de eerste vraag moest de breedte van de hangar geverifieerd worden, bij de tweede de inhoud berekend met behulp van een gegeven formule. Bij de derde vraag moest onderzocht worden of het grootste passagiersvliegtuig ter wereld in de hangar zou passen. Met p'-waarden tussen de 75 en 80 is deze opgave als eerste opgave geslaagd te noemen: de kandidaten bleken deze activiteiten over het algemeen prima te beheersen. De tweede opgave was een goniо-opgave. Dergelijke opgaven worden vaak relatief slecht gemaakt/vaker overgeslagen. Deze opgave was daarop geen uitzondering. Hoe het ook zij, het differentiëren met behulp van de productregel, overigens volgend jaar voor het laatst onderdeel van het examenprogramma, werd door 42% van de kandidaten correct gedaan.
Het opstellen van een raaklijn en het bepalen van het snijpunt van deze raaklijn met de grafiek was kennelijk te doen, getuige een p'-waarde van 64. En ten slotte het opstellen van een gonio-formule, deze keer met de letters p, q, r en s in plaats van de meer gebruikelijke a, b, c en d. Bij de centrale examenbespreking werd opgemerkt dat sommige leerlingen wel de juiste concepten, zoals amplitude en periode, uitrekenden, maar die dan vervolgens niet aan de juiste letters wisten te koppelen. Dat leidde dus tot onnodig, maar wel terecht, puntenverlies, want ook het aan elkaar relateren van wat er in de formule en in de grafiek gebeurt, is onderdeel van de examenstof. Dit was psychometrisch een mooie vraag, met een goede spreiding over alle mogelijk te scoren puntenaantallen, goed voor het maken van onderscheid tussen kandidaten. De derde opgave ging over een theedoosje, hadden we dat niet al eens gehad? Nee, vorig jaar ging het over een theezakje. Jammer dat deze meetkunde in het nieuwe programma eruit gaat, anders hadden we de komende jaren nog van mooie opgaven over koffiezakjes, koffie-

Bij de grafiek in de figuur past een formule van de vorm

$$S = \frac{\ldots}{(-T)^{0,9}}$$

Hierin is S de smeltcapaciteit in kg sneeuw of ijs per kg zout en T de temperatuur in °C.

3p 6 Bereken het getal dat op de puntjes moet staan.

figuur 8 Uit: havo A pilot (Zout strooien)

De functie f is gegeven door $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x^2 - x}$

De functie f heeft een minimum. Als de exponent van 2 in de uitdrukking $2^{\frac{1}{2}x^2 - x}$ minimaal is, dan is ook $f(x)$ minimaal.

3p 16 Bereken exact het minimum van f.

figuur 9 Uit: havo B ((G)een exponentiële functie)

pads, et cetera, kunnen genieten. In ieder geval was het tekenen van bovenaanzicht en uitslag voor bijna niemand een struikelblok: p'-waarden van tegen de 90. De derde vraag, het berekenen van de inhoud van het theedoosje, dat niet de vorm van een afgeknotte piramide maar van een afgeknot prisma had, was met een p'-waarde van 68 minder makkelijk. De volgende twee vragen gingen, hoe origineel, over een functie f en de bijbehorende grafiek. De eerste vraag, het aantonen van de afgeleide, ging behoorlijk, een p'-waarde van 70, mogelijk omdat de afgeleide al gegeven was. In de tweede vraag moest deze afgeleide gebruikt worden en kennis over de afgeleide toegepast worden. Dat ging een stuk moeizamer, met een p'-waarde van 42. Ook deze vraag had een mooie spreiding van gescoorde puntenaantallen. In de vijfde opgave ging het over een zogeheten geluidsbox, en stond het toetsen van logaritmische vaardigheden centraal. Er moest worden gerekend aan geluidsintensiteit en het geluidsniveau, met als uitsmijter een vraag met een praktische toepassing, namelijk de bepaling tot hoe ver van de geluidsbox er schade aan het gehoor kan ontstaan. Dat was geen eitje maar bleek toch goed te doen: de helft van de kandidaten scoorde 5 of 6 van de maximaal te behalen 6 punten.

De voorlaatste opgave van het examen ging over de wat complexere functie $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x^2 - x}$ en zijn grafiek. Het werken met de grafische rekenmachine is kennelijk goed gedrild, want het vinden van snijpunten van deze grafiek met een horizontale lijn zonder dat er voorwaarden gesteld worden aan de berekeningswijze was goed voor een p'-waarde van 92, hiermee de best scorende vraag van het hele examen. Daar stond tegenover dat de volgende vraag de slechtst scorende was, met een p'-waarde van 29, zie figuur 9. Is een dergelijke formulering veel kandidaten dan toch teveel? De laatste opgave ging over een wortelfunctie. Bij de eerste vraag moest er weer een afgeleide aangetoond worden, met behulp van product- en/of kettingregel. Van het tweede alternatief moet worden toegegeven dat dit wiskundig niet sluitend is. Zie ook de openingsalinea van dit stukje. Desondanks had deze vraag slechts een p'-waarde van 32. Bij de tweede vraag moest er weer met behulp van deze afgeleide aan een raaklijn gerekend worden. Dit ging dan weer prima: 70% van de leerlingen deed dit foutloos, en een p'-waarde van 78. De laatste vraag bevatte nog een stukje meetkunde, in de vorm van een oppervlakteberekening waarbij op bescheiden schaal de functie nog (verder) onderzocht moest worden. Niet te makkelijk, niet te moeilijk, precies goed dus voor een laatste vraag, met een p'-waarde van 59.

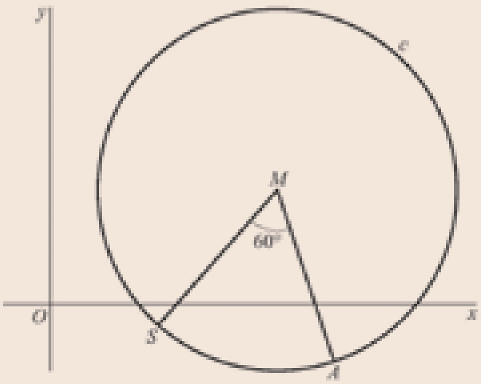
HAVO B pilot

[Sjoerd Crans]

De bespreking van het pilotexamen havo wiskunde B 2015 vond dit keer, in tegenstelling tot vorige jaren, plaats voorafgaand aan de bespreking van het reguliere examen. De aanwezige docenten constateerden dat het examen boven verwachting goed gemaakt was. Men vond dat de vernieuwing er aardig inzat, maar net als bij regulier werden er kanttekeningen gemaakt bij de evenwichtigheid van het examen. Het werd ook wat lang gevonden, met name door het rekenwerk met breuken. Dit examen kreeg van de zes docenten die de *quick scan* hebben ingevuld (dezelfde zes die aanwezig waren bij de bespreking?) een gemiddeld cijfer van 7,0, net zoals regulier iets hoger dan in 2014. Ze vonden de moeilijkheidsgraad goed, de lengte te lang, en de aansluiting

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$. Op c liggen de punten $A(5, -1)$ en $B(7, 1)$.
Op c ligt links van A het punt S zodanig dat $\angle AMS = 60°$. Zie figuur 2.

figuur 2



4p 7 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van lijnstuk MS.

figuur 10 Uit: havo B pilot (Punten, afstand, hoek en cirkel)

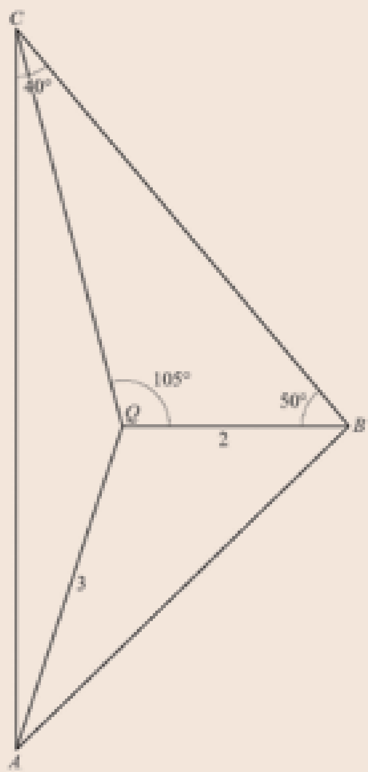
Gegeven is driehoek ABC met punt Q binnen de driehoek. Er geldt:

- $AQ = 3$;
- $BQ = 2$;
- $\angle CQB = 105°$;
- $\angle QBC = 50°$;
- $\angle ACB = 40°$.

Zie de figuur.

7p 13 Bereken de lengte van zijde AC. Rond je antwoord af op twee decimalen.

figuur



figuur 11 Uit: havo B pilot (Zijde AC)

op het gegeven onderwijs prima in orde. Op de overlappende vragen scoorden de pilotkandidaten over het algemeen ietsje beter. Uitzondering hierop was vraag 1, waar ze maar liefst 13 p'-punten beter scoorden. De verklaring hiervoor lag waarschijnlijk echter niet in een verschil in vaardigheid. Bij de examenbespreking, waar bijna alle correctoren aanwezig waren, werd een ongeautoriseerde aanvulling op het correctievoorschrift afgesproken: '43,0 is verdedigbaar'. Een dergelijke 'afspraak' is bij regulier niet gemaakt. De psychometrische cijfers van de TIA laten de gevolgen mooi zien: bij regulier scoort 47%, 2 scorepunten en 45%, 3 scorepunten, bij de pilot zijn deze cijfers respectievelijk 15% en 81%. Een andere verklaring voor dit verschil dan bovenstaande lijkt niet voorhanden. De N-term werd door het CvTE vastgesteld op 1,5. Dit levert op basis van de WOLF-gegevens, en voor wat het waard is gegeven het kleine aantal leerlingen, een percentage onvoldoende van 7,3% en een gemiddeld cijfer van 7,0.

De eerste vraag van de gonio-opgave was aangepast ten opzichte van regulier, omdat het differentiëren van gonio-functies niet meer in het nieuwe programma zit. Het vinden van de nulpunten en daar vervolgens wat mee doen, leverde een p'-waarde van 78. De cirkelopgave was wisselend gemaakt. Bij de eerste vraag, de afstand van een punt tot een cirkel, behaalden de meeste kandidaten ofwel 3 ofwel alle van de 6 te behalen scorepunten, resulterend in een p'-waarde van 68. De tweede vraag was met een p'-waarde van 22 de slechts scorende van dit examen, zie figuur 10. Bij 13 kandidaten was een 'N' ingevuld, bij meer dan de helft een '0' en bij een kwart een '1'. Teleurstellend voor een vraag die poogt de vernieuwing te belichamen. De opgave over een functie *f* en de bijbehorende grafiek was behoorlijk aangepast ten opzichte van de opgave in het reguliere examen. De tweede vraag in deze opgave was aangepast om het denkactieve er (meer) in te brengen en dat gaf gelegenheid tot het toetsen van de techniek om de afstand van een punt tot een lijn te bepalen in de eerste vraag, waarbij ook wat breukenwerk kwam kijken. Beide vragen zijn niet al te best gemaakt, met p'-waarden van respectievelijk 53 en 33. De vergelijking 'denkactief = moeilijk' zou niet op moeten gaan, maar wordt kennelijk door de leerlingen wel zo ervaren. De afstand-en-hoekenopgave kon, zoals dat hoort bij de vernieuwing, op verschillende manieren aangepakt en opgelost worden, zie figuur 11. Er was (dus) voldoende ruimte om fouten te maken en om het goed te doen. De p'-waarde was 63. De laatste opgave/vraag combineerde analyse met analytische meetkunde, in de vorm van een parabool en cirkel, ook de titel van de opgave. Kennelijk is het 'verschillende schrijfwijzen voor formules van tweedegraads functies hanteren en interpreteren' voor de meeste kandidaten nog geen parate vaardigheid: de p'-waarde was slechts 39.

VWO A

[Harco Weemink]

Het wiskunde A-examen heeft dit jaar een opmerkelijk resultaat opgeleverd. De uiteindelijke door het CvTE vastgestelde N-term van 0,8 heeft geleid tot 10,9% onvoldoendes bij een gemiddelde cijfer van 6,9. Een zodanig klein percentage onvoldoendes is sinds 2010 niet meer voorgekomen bij wiskunde A. Een gemiddelde cijfer van 6,9 was ook al het resultaat in 2013. Uit de analyse van de resultaten van 16078 kandidaten bleek dat de vaardigheid van de kandidaten op dit examen een flink stuk hoger was vergeleken met bijvoorbeeld de populatie van 2010. Verklaringen voor deze vaardigheidsstijging kunnen mogelijk gevonden worden in een aantal aspecten. Uit de analyse van de resultaten op de afzonderlijke vragen bleek dat niet alleen een grotere vaardigheid zichtbaar was bij de 'trainbare vragen', wat verklaard zou kunnen worden door meer examentraining of examenspecifieke voorbereiding, maar bleek tevens dat er dit jaar ook een duidelijk hogere vaardigheid geconstateerd is bij de algebraïsche vragen. Het is mogelijk dat de toegenomen aandacht voor dit onderwerp in de examens heeft geleid tot een betere voorbereiding van de kandidaten hierop. Opvallend was ook dat de scores op de relatief makkelijke vragen hoger waren dan op basis van eerdere examens werd verwacht. Misschien dat de toegenomen aandacht voor rekenen ook effect heeft gehad op de resultaten op deze vragen. Veranderende populaties zouden wellicht ook een verklaring kunnen opleveren maar nadere bestudering van de beschikbare gegevens leert dat er sinds 2010 weliswaar een verschuiving van wiskunde B naar wiskunde A is, maar ook, en zelfs getalsmatig groter, een verschuiving van wiskunde C naar wiskunde A. Mogelijke verklaringen liggen nog wel in meer aandacht voor wiskunde als gevolg van de kernvakkenregeling en in een strenger determinatiebeleid van scholen waardoor leerlingen eerder naar de havo 'afstromen'. Een laatste aspect dat een bijdrage zou hebben kunnen leveren aan de geconstateerde hogere vaardigheid ligt in de nieuwe vakspecifieke regel en het bijbehorende artikel *Gelijke monniken, gelijke kappen*.[8] Tijdens de examenbespreking gaven de meeste aanwezige docenten aan dat deze regel in een aantal gevallen heeft geleid tot een soepelere beoordeling dan in de voorgaande jaren. Dit effect is zonder uitgebreid onderzoek niet kwantificeerbaar maar tijdens de vergadering werd het vermoeden geuit dat dit wel eens gemiddeld 1 tot 2 scorepunten per kandidaat zou kunnen schelen.

De eerste opgave, *Diabetesrisicotest*, was een behoorlijk eenvoudige binnenkomer. Zowel vraag 1 als vraag 3 leverden een p'-waarde boven de 90 op. We kunnen concluderen dat vooral vraag 3 - 93% van de leerlingen scoorde hier de maximumscore - te makkelijk bleek voor de huidige wiskunde A-populatie. De tweede vraag in

Er geldt:

$$C_{links} = \frac{g - \text{linkerspecificatiegrens}}{3s} \text{ en } C_{rechts} = \frac{\text{rechterspecificatiegrens} - g}{3s}$$

Hierin is g het steekproefgemiddelde. We nemen aan dat s, de standaardafwijking van het proces, constant is en steeds gelijk is aan 0,65.
De procescapaciteitsmaat C is de **kleinste** van deze twee waarden C_{links} en C_{rechts}.

Als bijvoorbeeld het steekproefgemiddelde g gelijk is aan 281 cm en $s = 0{,}65$, dan geldt: $C_{rechts} = \frac{284 - 281}{3 \cdot 0{,}65} \approx 1{,}5$ en $C_{links} = \frac{281 - 276}{3 \cdot 0{,}65} \approx 2{,}6$.
Hieruit volgt dat in dit voorbeeld geldt: $C = C_{rechts} \approx 1{,}5$.

We nemen verder aan dat het steekproefgemiddelde g binnen de specificatiegrenzen ligt. De standaardafwijking s verandert ook nu niet.

Het productieproces verloopt slechter als het steekproefgemiddelde g verder van de streefwaarde af komt te liggen.

4p 20 Beredeneer aan de hand van de formules of de waarde van C in dit geval groter wordt of juist kleiner.

figuur 12 Uit: vwo A (Statistiek in de auto-industrie)

de opgave *Kosten van betalingsverkeer*, vraag 7, is een voorbeeld van een vraag die veel hoger scoorde dan op basis van onderzoek vooraf werd verwacht. Hoewel nog 52% van de leerlingen voor deze vraag 0 punten behaalde, blijkt uit de p'-waarde van 41 dat een groot deel van de leerlingen die de eerste stap wel goed maakte, uiteindelijk alle punten wist te scoren. De laatste vraag van deze opgave bleek de moeilijkste van dit examen. Uit de reacties op het forum en de tijdens de examenbespreking bleek dat dit een erg lastige vraag was om na te kijken. Het geven van een volledig sluitende verklaring was voor veel kandidaten lastig, uiteindelijk kreeg slechts 5% van de leerlingen de maximumscore voor deze vraag. De laatste twee vragen van de derde opgave, *Piramiden*, zijn twee voorbeelden van vragen waarbij een duidelijk hogere vaardigheid van kandidaten is geconstateerd. Bij de beoordeling van vraag 12 werd tijdens de examenbespreking duidelijk hoe, volgens de aanwezige docenten, de nieuwe vakspecifieke regel moest worden toegepast. Een leerling die in de tweede stap van het correctievoorschrift verzuimd had de haakjes te plaatsen en hier zonder tussenstap de juiste formule achter plaatste, heeft niet laten zien dat hij correct heeft gehandeld bij de daaropvolgende stappen. Als via een tussenstap bleek dat de leerling de haakjes weliswaar niet genoteerd had, maar wel had doorgerekend alsof er wel haakjes staan, dan konden alle punten worden toegekend. In de opgave *Bevingen in Japan* werd vraag 17 door enkele docenten bestempeld als een weggevertje. Het invullen van een gegeven waarde in een formule, de uitkomst gelijk stellen aan een andere formule en vervolgens dit met de GR oplossen lijkt inderdaad niet al te moeilijk. De p'-waarde van 74 bij deze vraag laat zien dat het inderdaad geen moeilijke vraag was maar zeker ook geen weggevertje. Bij de opgave *Statistiek in de auto-industrie* moesten leerlingen voornamelijk werken met de normale verdeling. De redeneervraag 20, zie figuur 12, scoorde voor dit type vraag met een p'-waarde van 50 redelijk hoog, hoewel op het forum ook bleek dat het hier voor veel kandidaten moeilijk was om een redenering volledig sluitend op te stellen, of op een correcte wijze een getallenvoorbeeld te veralgemeniseren voor alle hier geldende situaties. De afbeelding boven de laatste vraag heeft veel kandidaten in de verkeerde richting van een tekentoets geduwd. In de vraagstelling werd echter expliciet aangegeven dat de hypothesetoets op grond van de gemiddelde hoek uit de steekproef moest worden uitgevoerd. Uit de *quick scan*

Opgave	vraag nummer pilot	vraag nummer regulier	punten	p' pilot	p' regulier
Piramiden	1	10	3	96	94
	2	11	4	68	69
	3	12	3	74	78
Kosten van betalingsverkeer	5	6	4	95	95
	6	7	4	49	41
	7	8	3	77	72
	8	9	4	41	26
Bevingen in Japan	13	14	5	74	71
	14	15	3	61	53

tabel 2 Vwo overlap A – A pilot

die door 676 docenten is ingevuld, bleek dat dit examen als relatief makkelijk en een klein beetje aan de lange kant werd beoordeeld. De inhoudelijke aansluiting op het onderwijs vond men voldoende en het examen is door docenten met een gemiddelde van 6,3 beoordeeld.

VWO A pilot

[**Harco Weemink**]

Het pilotexamen voor wiskunde A bevatte dit jaar net als het reguliere examen 21 vragen, maar er waren 6 punten minder te behalen voor het pilotexamen (79 ten opzichte van 85). Tijdens de bespreking van dit examen is aangegeven dat het examen beter aansluit op het onderwijs op de pilotscholen dan het examen van 2014. De docenten waren van mening dat de vernieuwing in het examen goed zichtbaar was. Wel werd geconstateerd dat er een behoorlijk verschil in moeilijkheidsgraad zat tussen de vragen uit de overlap met het reguliere examen en de pilotspecifieke vragen. Dit beeld werd bevestigd door de analyses: de gemiddelde p'-waarde op de overlap lag rond de 70, terwijl over het hele examen een p'-waarde van 57 werd behaald. De docenten beoordeelden dit examen met een gemiddeld cijfer net onder de 6. Als we verder kijken naar de resultaten van de pilotleerlingen op de overlap, zie tabel 2, dan valt op dat deze kleine populatie (243 leerlingen) vooral vaardiger is op de meer algebraïsche (redeneer)vragen. Een beeld dat past bij de grotere aandacht voor dit onderwerp in het nieuwe programma, dat vanaf het jaar 2018 zal worden geëxamineerd.

In de opgave *Piramiden* waren de eerste drie vragen identiek aan de vragen in deze opgave in het reguliere examen. Omdat het differentiëren al in een aantal andere pilotspecifieke vragen aan de orde kwam, is er voor gekozen om in de laatste vraag van deze pilotversie een meer denkactieve vraag te stellen. De leerlingen moesten de grafiek van het verband tussen de parameter in de formule en de *x*-waarde van het maximum tekenen, zonder dat rechtstreeks de formule van dit verband was gegeven. Qua moeilijkheidsgraad was deze vraag uiteindelijk vergelijkbaar met de vraag in het reguliere examen. De tweede opgave, *Kosten van betalingsverkeer*, kwam op dezelfde wijze ook in het reguliere examen voor. De opgave *Station Amersfoort* daarentegen is in zijn geheel pilotspecifiek. Het werken met een goniometrisch verband staat centraal in deze opgave. Na de hoog scorende (p' = 90) startvraag waar leerlingen een goniometrische formule moesten opstellen, werd in vraag 11 gevraagd om de helling van dit goniometrische verband te berekenen. Omdat het differentiëren van deze formule niet tot het examenprogramma behoort, was het noodzakelijk om hier de juiste functie op de GR of een differentiequotiënt te gebruiken. Tijdens de examenbespreking werd door de docenten afgesproken dat het interval waarop het differentiequotiënt wordt berekend niet groter mag zijn dan [7,4 ; 7,6]. De eerste twee vragen uit *Bevingen in Japan* zaten ook in het reguliere examen. Met p'-waarden tussen de 44 en 74 is dit een opgave met een mooie moeilijkheidsgraad. Bij de laatste vraag van deze opgave wordt een stevige algebraïsche activiteit van de leerlingen gevraagd, zie figuur 13. De p'-waarde van 47 en de opmerking van een pilotdocent dat deze vraag verbazingwekkend goed ging, bevestigt het beeld dat de toegenomen aandacht voor deze algebraïsche vaardigheden in het nieuwe programma zijn vruchten afwerpt.

Omdat in het nieuwe programma de kansrekening en statistiek niet meer getoetst worden op het centraal examen, zaten er in de opgave *Snoeken* vragen uit de domeinen *Algebra en tellen*, Verbanden en Veranderingen. Het bepalen van een inverse formule in de eerste vraag was qua moeilijkheidsgraad gelijk aan de laatste vraag in de vorige opgave waar ook een algebraïsche activiteit werd gevraagd. Vraag 18, waar een redenering richting een grenswaarde werd

Bij een beving komt heel veel energie vrij. Hiervoor wordt een andere formule van Richter gebruikt:

$$M = 0{,}67 \cdot \log(E) - 0{,}9$$

Hierin is E de vrijkomende energie in kilojoule en M de magnitude op de schaal van Richter.
Door deze formule te combineren met de formule $M = \log(A) + 3$ is het mogelijk een verband op te stellen tussen de vrijkomende energie E en de maximale amplitude A.
Het verband tussen E en A is te schrijven als:

$$\log(A) + 3 = 0{,}67 \cdot \log(E) - 0{,}9$$

Dit verband kan vereenvoudigd worden tot de vorm $E = 10^{p \cdot \log(A) + q}$.

4p **16** Bereken de waarden van p en q in deze formule. Rond p en q af op twee decimalen.

figuur 13 Uit: vwo A pilot (Bevingen in Japan)

Opgave	vraag nummer wiskunde C	vraag nummer wiskunde A	punten	p' wiskunde C	p' wiskunde A	verschil
Statistiek in de auto-industrie	5	18	3	83	86	-3
	6	19	4	75	84	-9
	7	20	4	29	50	-21
Bevingen in Japan	14	15	3	29	53	-24
	15	16	3	37	58	-21
	17	14	5	54	71	-17
		totaal	22			
			Pgem	51.5	67.4	-15.9

tabel 3 Vwo overlap A – C

Om de magnitude van een beving te bepalen, gebruikt men de formule van Richter. Hieronder staat een vereenvoudigde versie daarvan:

$$M = \log(A) + 3$$

In deze formule is M de magnitude en A de maximale amplitude in mm.

Uit de formule blijkt, dat als de maximale amplitude A tien keer zo groot wordt, de magnitude met 1 eenheid toeneemt.

3p **14** Toon met behulp van de rekenregels van logaritmen aan dat $\log(10A)+3$ altijd 1 groter is dan $\log(A)+3$.

figuur 14 Uit: vwo C (Bevingen in Japan)

gevraagd, en vraag 20 waar een formule moest worden opgesteld bleken beide een 'alles-of-niets'-vraag te zijn: veel kandidaten met 0 punten, veel kandidaten met het maximale aantal punten en weinig daar tussenin. Tijdens de examenbespreking was er enige onduidelijkheid of het begrip grenswaarde – dat niet in de syllabustekst is opgenomen – gebruikt mag worden als aanduiding van een asymptotische waarde. Mede op basis van het feit dat het begrip grens(waarde) bij een tweetal vragen in het voorbeeldmateriaal in de syllabus voorkomt, heeft het CvTE besloten dat het begrip grenswaarde op deze wijze in een examen mag worden gebruikt.
De korte onderzoeksopgave *Number Rumba* werd, met een p'-waarde van 17, uiteindelijk de slechtst scorende vraag van het examen. Slechts 3% van de kandidaten behaalde de maximale score van 7 punten terwijl 55% van de kandidaten geen enkel punt behaalde voor deze vraag. Deze combinatoriekvraag bleek voor de leerlingen veel verschillende oplossingsroutes te bieden waarvan er diverse niet tot het juiste antwoord leidden, maar ook niet de mogelijkheid gaven om een van de tussenstappen te belonen met een of meer deelpunten. De iets hogere vaardigheid van deze pilotpopulatie en de moeilijkheidsgraad van dit pilotexamen hebben samen geleid tot een door het CvTE vastgestelde N-term van 1,9, wat voor de ruim 200 betrokken leerlingen een gemiddeld cijfer van 7,0 met 13,5% onvoldoende op heeft geleverd. Dit verschil in vaardigheid tussen de reguliere en pilotpopulatie is redelijk in lijn met de afgelopen jaren.

VWO C

[Harco Weemink]
De dalende trend van het aantal leerlingen dat een wiskunde C-examen maakt is ook dit jaar zichtbaar. Waar vorig jaar via WOLF nog de resultaten van 1652 kandidaten zijn ontvangen, bleef het aantal dit jaar steken op 1344. Deze kandidaten kregen een examen voorgeschoteld met 21 vragen verdeeld over vijf opgaven. Het maximaal aantal te behalen punten was 81. In de *quick scan*, die door 283 docenten is ingevuld, werd het examen door ruim meer dan de helft van docenten beoordeeld als 'niet te makkelijk/niet te moeilijk' en qua lengte precies goed. De inhoudelijke aansluiting op het onderwijs vond men voldoende tot goed en dat resulteerde in een gemiddeld cijfer van 6,7. De verdeling van de moeilijkheidsgraad van de vragen was in het C-examen beter dan in het A-examen. Slechts één vraag scoorde een p'-waarde groter dan 90 en de laagste p'-waarde was 29. Hoewel al jaren het beeld is dat wiskunde C-kandidaten veel meer vragen overslaan dan wiskunde A-kandidaten, waren er in de analyses geen aanwijzingen dat leerlingen last hadden van tijdnood.
De overlap met het A-examen bevatte zes vragen met in totaal 22 punten (27%). Uit de analyse bleek dat het vaardigheidsverschil op basis van deze overlap, zie tabel 3, behoorlijk groot was. Waar afgelopen jaar het verschil in gemiddelde p'-waarde ongeveer 7 was, was het verschil dit jaar bijna 16. Hieruit blijkt dat de bij wiskunde A gemeten vaardigheidsstijging bij wiskunde

C niet of nauwelijks te constateren is. Dit heeft geresulteerd in een door het CvTE vastgestelde N-term van 0,7 waarbij het percentage onvoldoendes op 22,6% kwam te liggen en het gemiddelde cijfer 6,4 werd. Een resultaat dat redelijk in lijn ligt met de resultaten van de afgelopen jaren.

Het examen begon met twee redelijk eenvoudige vragen in de opgave *Succesvogels en pechvogels* waarbij in vraag 2 de standaardactiviteit van het omrekenen van een groeifactor van 15 jaar naar 1 jaar werd gevraagd. Deze vraag leverde een p'-waarde van 74 op. Opvallend dat bij regelmatig in examens terugkerende activiteiten bij de wiskunde A-leerlingen een groter effect van trainbaarheid lijkt op te treden dan bij de C-leerlingen. Het begin van *Statistiek in de auto-industrie* kwam ook voor in het A-examen. Uit het grote verschil tussen p'-waarde van A- en C-leerlingen op vraag 7 blijkt dat C-leerlingen meer moeite hebben met deze redeneer-algebra-vragen. Waar het wiskunde A-examen deze opgave afsloot met een hypothesetoets, bevatte het C-examen twee kansrekeningvragen die voor de meeste leerlingen goed te maken bleken te zijn. De eerste vraag van de wiskunde C-specifieke opgave *Reistijden* werd nogal gemengd ontvangen op de examenbespreking. De mening van de aanwezige docenten varieerde van 'ontzettend leuke som' tot 'vreselijk'. Uit de opmerkingen tijdens de vergadering bleek dat een groot aantal leerlingen op basis van slechts één punt een snelheid had berekend. De aanwezige docenten waren van mening dat dit een zodanig inzichtelijke fout was, dat hier het toekennen van 0 punten rechtvaardig was. De laatste vraag van deze opgave was met een p'-waarde van 91 de hoogst scorende vraag van het examen. Het opstellen en oplossen van een lineaire vergelijking blijkt een vaardigheid te zijn die deze leerlingen (eventueel met GR) goed beheersen. De opgave *Bevingen in Japan* was grotendeels gelijk aan die in het A-examen. De volgorde van de vragen was echter afwijkend. Bij het C-examen had dat tot resultaat dat de moeilijkste vraag, zie figuur 14, aan het begin van de opgave zat. Het werken met logaritmen blijkt nog steeds een erg lastig onderdeel voor de C-leerlingen, wat te zien is in een p'-waarde van 29 voor deze vraag. In tabel 3 is te zien dat bij alle overlapvragen in deze opgave de C-leerlingen veel slechter scoorden dan de A-leerlingen. In de laatste opgave *De Manchester kleurencirkel* ging het weer om combinatoriek en kansrekening. Zoals vooraf verwacht, werd op de standaard binomiale verdeling van vraag 19 een stuk beter gescoord (p' = 82) dan de op de twee laatste vragen waar een kans berekend moest worden op basis van (deels gegeven) waarden in een tabel (p' = 68 en p' = 60). Tijdens de examenvergadering werd aangegeven dat dit examen, net als vorig jaar, in de gebruikte contexten niet erg past bij een populatie, die voor ruim meer dan de helft uit meisjes bestaat. Uit de analyses van dit jaar blijkt dat het vaardigheidsverschil tussen de jongens en de meisjes weer ongeveer 3 p'-punten in het voordeel van de jongens is en hoewel niet blijkt dat dit vaardigheidsverschil gerelateerd is aan de gebruikte context, is dit toch iets waar we in de toekomst bij de constructie meer op zouden kunnen sturen.

VWO C pilot

[**Harco Weemink**]

Het wiskunde C-pilotexamen werd tijdens de bespreking door de aanwezige docenten bestempeld als een mooi en evenwichtig examen waar de vernieuwing goed zichtbaar is. Met een N-term van 1,2 scoorden de 33 kandidaten waarvan de resultaten via WOLF zijn ingestuurd, een gemiddelde cijfer van 6,7 met 21,2% onvoldoendes. Een iets beter resultaat dan de afgelopen jaren, wat deels te verklaren valt door de waargenomen vaardigheidsstijging op de kernvakken. Het pilotexamen heeft tien vragen overlap met het reguliere C-examen. In deze tien vragen konden totaal 36 punten gescoord worden, wat net als vorig jaar een overlap van 47% inhoudt, zie tabel 4. Als we kijken naar de vragen waar de pilotleer-

Opgave	vraag nummer pilot	vraag nummer regulier	punten	p' pilot	p' regulier	verschil
Succesvogels en pechvogels	1	1	3	79	75	4
	2	2	4	69	74	-5
	3	3	4	64	61	3
	4	4	5	72	54	18
Reistijden	8	10	3	51	53	-2
	9	12	3	90	83	7
	10	13	3	87	91	-4
Bevingen in Japan	14	15	3	22	37	-15
	15	16	3	65	64	1
	16	17	5	70	54	16
		totaal	36			
			p' gem	67.3	63.6	3.7

tabel 4 Vwo overlap C – C pilot

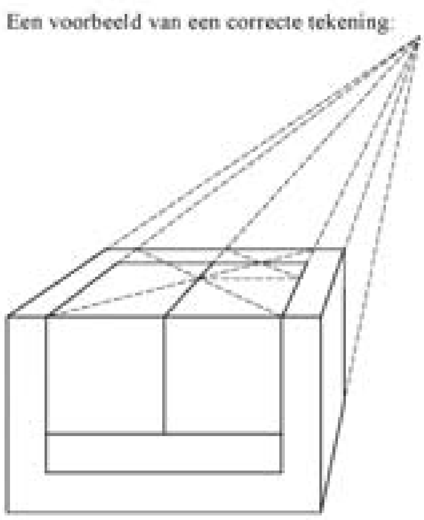
De Egyptenaren beschreven de oplossing van een dergelijk probleem in woorden en aan de hand van een voorbeeld. Men kende toen nog geen formules. Tegenwoordig kan men de oplossing veel korter beschrijven met behulp van formules.
Noem de totale hoeveelheid die verdeeld moet worden T, het verschil tussen de opeenvolgende delen v (met $v > 0$) en het aantal personen waarover verdeeld moet worden n. In het eerstgenoemde voorbeeld geldt dan $T = 10$ (hekat), $v = \frac{1}{8}$ en $n = 10$ (personen).

4p **7** Stel, uitgaande van de bovengenoemde procedure van de oude Egyptenaren, een formule op waarin het grootste deel G uitgedrukt wordt in T, v en n.

figuur 15 Uit: vwo C pilot (Een oud-Egyptisch verdeelprobleem)

lingen duidelijk hoger scoren dan zijn dat vraag 4 en vraag 16. Dit zijn beide vragen waarbij een halveringstijd moet worden berekend. Blijkbaar dus een onderwerp dat door de grotere aandacht voor algebra in het nieuwe programma bij deze leerlingen tot een beter resultaat leidt, hoewel de populatie natuurlijk zo klein is dat hier ook sprake zou kunnen zijn van een school- of docentspecifiek effect.

Na de overlapopgave *Succesvogels en pechvogels* was de opgave *Een oud-Egyptisch verdeelprobleem* de eerste pilotspecifieke context. Na de startvraag waar een recursieve formule moest worden opgesteld, werd in vraag 6 gevraagd een rij getallen te berekenen. In vraag 7 werd vervolgens gevraagd om de formule voor het grootste getal in deze rij op te stellen, zie figuur 15. Hierbij werd niet de vorm van de formule weggegeven zodat de leerlingen aan de hand van de in het voorbeeld gegeven berekening met getallen zelf de formule met meerdere variabelen moesten opstellen. Hoewel 39% van de leerlingen geen punten wist te scoren voor deze vraag, was de p'-waarde van 45 voor



figuur 16 Uit: vwo C pilot (Kubuskalender)

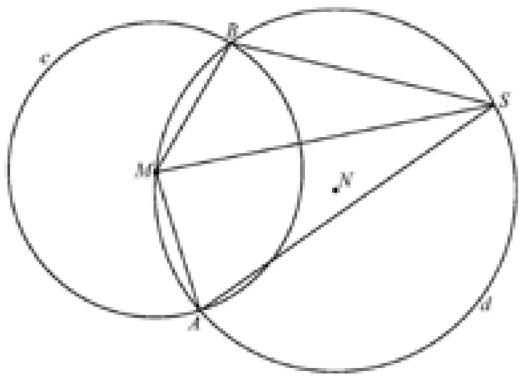
deze vraag hoger dan op voorhand verwacht. De opgave *Reistijden* kwam ook weer voor in het reguliere examen. De pilotleerlingen haalden ongeveer dezelfde score als de reguliere leerlingen. Voor de opgave in het domein *Logisch redeneren* was in dit examen gekozen om het te koppelen aan de soms onnavolgbare uitspraken van Johan Cruijff. Hoewel de vragen inhoudelijk goed aansloten bij de stof, gaven de pilotdocenten aan dat er qua moeilijkheidsgraad nog wel meer in deze context had gezeten. Bij vraag 11 bleek het in veel gevallen lastig de leerlingantwoorden bij het derde element in het correctievoorschrift te beoordelen. Bij vraag 12 echter, waar leerlingen ook een redenering moesten opschrijven, gaven de docenten aan dat de correctie geen problemen opleverde. Met een p'-waarde van 94 was dit de hoogst scorende vraag van het examen. De vragen in de opgave *Bevingen in Japan* kwamen ook voor in het reguliere wiskunde C-examen. De eerste vraag in deze opgave werd door de reguliere kandidaten al redelijk slecht gemaakt, maar de pilotkandidaten scoorden hier met een p'-waarde van 22 nog een stuk lager. De tijdens de bespreking aanwezige pilotdocenten gaven aan dat deze vraag gezien de syllabus passend is in een examen, maar dat er in het huidige pilotmateriaal op dit moment veel te weinig aandacht voor dit onderdeel is.
In de laatste opgave van het examen was er, naast vragen over combinatoriek, ruimte voor vragen in het nieuwe domein *Vorm & Ruimte*. Bij vraag 18 bleek een flink aantal leerlingen ervoor gekozen te hebben om alle mogelijkheden uit te schrijven. Met een totaal van 75 mogelijkheden is dan de kans op het missen of dubbel opschrijven van een mogelijkheid natuurlijk groot. In de laatste vraag van het examen werd aan de leerlingen gevraagd om de perspectieftekening van de kubuskalender op de uitwerkbijlage af te maken. 45% van de leerlingen scoorde 3 punten, wat past bij een score voor het afmaken van de tekening van de buitenkant van de kubuskalender. Slechts 21% van de leerlingen wist door het tweemaal tekenen van een diagonaal de lijn op driekwart van de kubuskalender te construeren, zie figuur 16.

VWO B

[Ivo Claus]

Het examen kreeg in de *quick scan* van 576 docenten (429 scholen) gemiddeld een ruime voldoende (6,5), 62% van de docenten vond het examen 'niet te moeilijk/niet te makkelijk'. De rest was verdeeld: 25% vond het een moeilijk examen, 10% makkelijk. Best leuk om dit te vergelijken met de mening van 2161 leerlingen op *scholieren.com*: zij schatten het examen een stukje moeilijker in. Maar zij kijken er waarschijnlijk toch op een andere manier tegenaan dan de docenten... Overigens behaalden 33 leerlingen (0,22%) van de leerlingen in de steekproef van 14925 leerlingen in WOLF alle 77 scorepunten. De meerderheid van de docenten (61%) vond het examen te lang. De analyses van de leerlingresultaten wijzen echter niet in die richting. Bovendien – toegegeven, het zegt niet alles – was het aantal scorepunten (77) zowel als het aantal vragen (17) deze keer aan de lage kant voor een examen vwo wiskunde B. Over de inhoudelijke aansluiting op het onderwijs was men, grosso modo, tevreden. Het examen werd door het CvTE genormeerd met N = 1,4 wat resulteerde in slechts 10,6% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 7,1. Een prachtig resultaat! En wat te denken van het feit dat meisjes het voor het eerst sinds de invoering van wiskunde B in 2010 beter deden dan de jongens, hoewel nipt.

De eerste vraag, met parameter, werd zeer goed gemaakt, zoals verwacht. Een prettig begin voor veel leerlingen! Op het forum spitste de discussie zich toe op het al dan niet afstraffen van notaties als $\sqrt[1,5]{16}$ en $\int_0^a \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\ dx$ (zonder haakjes). Voor beide standpunten zijn er voor- en tegenstanders te vinden. Op het forum werden onder andere de grafische rekenmachine, de lesmethode en 'Inleiding tot de Analyse' van prof. dr. G.R. Veldkamp genoemd. Misschien voelt een lezer van *Euclides* zich wel geroepen om in een toekomstig nummer van dit tijdschrift de argumenten vóór en tegen een bepaalde notatie(fout) op een rijtje te zetten. Bij vraag 3 werd expliciet gevraagd om de coördinaten van punt *A* te berekenen alvorens het gezochte lijnstuk te tekenen. Uiteraard moet de leerling dan zelf bedenken dat punt *B* op twee plekken zou kunnen liggen. Een berekening van de juiste coördinaten van punt *B* of een bijbehorende redenering moet dan gegeven worden. Overigens was dit een vraag waarbij de jongens het duidelijk beter deden dan de meisjes: p'-waarden van 59 respectievelijk 53. In de derde opgave werd het fenomeen '(waarneembare) helderheid van sterren' onder de loep genomen. In de oudheid werd deze helderheid beschreven door een geheel getal tussen 1 (zeer helder) en 6 (nauwelijks zichtbaar). Tegenwoordig kan de helderheid precies gemeten en uitgedrukt worden in de eenheid lux. In de opgave wordt gerekend aan het verband tussen deze twee grootheden met verschillende eenheid. De eerste drie vragen van de opgave werden goed gemaakt door de leerlingen. De laatste vraag scoorde een p'-waarde van 43. Misschien was de situatie lastig voor te stellen: de tijd bepaalt de afstand van de ster tot de aarde, de afstand de waarneembare helderheid. Of was het de $\frac{df}{dx}$-notatie die leerlingen in de war bracht? Of mislukte het differentiëren vanwege de constante in de formule? Helaas blijft het gissen hoe zwaar deze en andere aspecten bijdragen aan het minder goede resultaat van deze vraag.



figuur 17 Uit: vwo B (Gelijke hoeken)

Vraag 8 was de eerste meetkundevraag van het examen, zie figuur 17. Bewezen moest worden dat hoek *ASM* en hoek *BSM* even groot zijn. Over deze vraag ontstond hevige discussie op het forum ten aanzien van de te noemen stellingen. Sommige docenten waren van mening dat je uit 'gelijke koorden' (op verschillende plekken!) direct 'gelijke omtrekshoeken' mag afleiden. Uitspraak van de Centrale Examenbespreking was conform de algemeen geldende zienswijze: het correctievoorschrift (cv) is opgesteld conform de regels van het spel van de meetkunde in het examen vwo wiskunde B, een spel van redeneren en bewijzen. De lijst met stellingen voorin het examen staat er om aan te geven welke stellingen gebruikt mogen worden. Stellingen die er niet staan..., die moeten bewezen worden. Bij vraag 11 kwam op het forum een alternatieve oplossing ter sprake: bij die vraag moest aangetoond worden dat het verschil tussen twee *x*-coördinaten $\frac{2}{3}\pi$ bedraagt. In het cv werden de twee waarden uitgerekend en vervolgens het verschil. Sommige leerlingen berekenden die twee waarden helemaal niet, maar baseerden hun conclusie direct (of met toelichting) op de periode $\frac{2}{3}\pi$ van een gedeelte van de oplossingen (op $\mathbb{R}$). Dat hadden we niet voorzien! In de opgave *Hardheid* wordt uitgelegd hoe de hardheid van een materiaal wordt bepaald: een kogel wordt in het materiaal gedrukt met een bepaalde kracht. Er ontstaat een indruk in het materiaal in de vorm van een bolsegment. De diameter van die indruk bepaalt dan de hardheid. De opgave werd goed gemaakt, met uitzondering van vraag 14. Dat meetkundige uitstapje viel bij de leerlingen wat zwaar, terwijl de vraag ons relatief

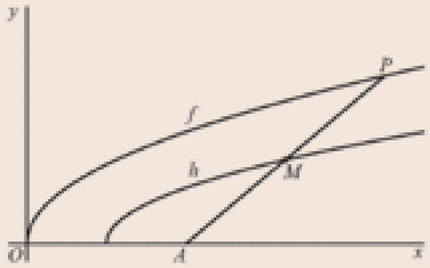
$f(x) = \sqrt{x}$

Gegeven is het punt $A(2, 0)$. Bij elk punt P op de grafiek van f kan het midden van lijnstuk AP worden bepaald. Dat midden noemen we M.

Verder is de functie h gegeven door $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$.

In figuur 2 zijn de grafieken van f en h getekend. Ook is voor een punt P het lijnstuk AP met midden M getekend.

figuur 2



Er geldt: voor elk punt P op de grafiek van f ligt het punt M op de grafiek van h.

4p 2 Bewijs dit.

2 **maximumscore 4**

- De coördinaten van P zijn $(p, \sqrt{p})$ 1
- Voor de coördinaten van M geldt: $x = \frac{1}{2}p + 1$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{p}$ 1
- $h(\frac{1}{2}p + 1) = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}p + 1) - \frac{1}{2}}$ 1
- $\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}p + 1) - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}p} = \frac{1}{2}\sqrt{p}$ (, dus M ligt op de grafiek van h) 1

of

- De coördinaten van P zijn $(p, \sqrt{p})$ 1
- Voor de coördinaten van M geldt: $x = \frac{1}{2}p + 1$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{p}$ 1
- $x = \frac{1}{2}p + 1$ geeft $p = 2x - 2$ 1
- Dus $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x - 2} = \sqrt{\frac{1}{4}(2x - 2)} = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ (, dus M ligt op de grafiek van h) 1

figuur 18 Uit: vwo B pilot (Wortelfuncties)

eenvoudig leek. Overigens merkte een van de docenten op het forum terecht op dat het (tussen haakjes) noemen van de stelling van Thales in het cv niet had mogen ontbreken. Bij vraag 17 ten slotte, moest een punt in een figuur getekend worden. De toevoeging 'licht je werkwijze toe' gaf, bij nader inzien, niet voldoende duidelijk aan dat van de leerling verlangd werd dat hij een (summiere) onderbouwing van de correctheid van zijn antwoord moest geven. Hiervoor is in de N-term gecorrigeerd.

VWO B pilot

[**Ivo Claus**]

Er namen 95 leerlingen deel aan dit pilotexamen. Dat zijn er een stuk minder dan de jaren hiervoor, omdat één school (van de vijf) zich teruggetrokken heeft tot aan de landelijke invoering van het nieuwe examenprogramma. De zes docenten vonden het examen qua niveau makkelijk tot gemiddeld. Men vond het examen aan de lange kant. De aansluiting bij het gegeven onderwijs achtte men voldoende tot goed: de vernieuwing was in voldoende mate aanwezig. Punt van kritiek, dat de examenmakers met de docenten delen, is de beperkte hoeveelheid wiskundige denkactiviteiten (WDA) in dit examen. De noodzaak van overlap met een regulier examen geeft soms, zoals dit keer, beperkte ruimte voor WDA. Het examen kreeg van de pilotdocenten een mooi gemiddeld cijfer van 7,0. Op basis van de psychometrische analyses blijkt al met al dat het pilotexamen een fractie gemakkelijker was dan het reguliere examen en dat de pilotkandidaten enigszins vaardiger waren dan de reguliere kandidaten. De N-term van dit examen is,

daaruit voortvloeiend, door het CvTE vastgesteld op 1,2 hetgeen resulteerde in 11,6% onvoldoendes en een prachtig gemiddeld cijfer van 7,4. Precies één van de 95 leerlingen behaalde alle 80 scorepunten. De meisjes deden het gemiddeld beter: zij behaalden een gemiddelde p'-waarde van 70,5 tegenover 67,0 bij de jongens! Maar nogmaals: $n = 95$.

In pilotvraag 2 wordt onder meer getoetst of de leerling het begrip 'grafiek' goed onder de knie heeft. Er werd – enigszins teleurstellend – niet zo goed gescoord: de vraag had een p'-waarde van 39. Zelfs 39% van de leerlingen kreeg hier 0 scorepunten toebedeeld, terwijl het eerste bolletje al gauw opgeschreven zou moeten zijn, zie figuur 18. Met pilotvraag 5 werd nog één vraag voortgeborduurd op de situatie in de tweede opgave, in tegenstelling tot het reguliere examen. Gevraagd wordt naar het tijdstip waarop lijnstuk *AB* raakt aan de kleine cirkel. Tijdens de constructie van deze vraag ontstond bij de examenmakers de discussie wat de definitie is van het raken van een lijnstuk aan een cirkel. Met 'één punt gemeenschappelijk' (zoals bij een lijn) kom je er uiteraard niet. Vandaar dat gekozen is om de vertaling naar 'vector $\overrightarrow{AB}$ staat dan loodrecht op vector $\overrightarrow{OA}$' weg te geven. Je zou zeggen dat je dan vrij snel die twee vectoren uitschrijft, en inproduct = 0 noemt, waarmee de eerste twee scorepunten binnen zijn. Toch behaalde bijna een op de drie pilotleerlingen geen enkel scorepunt. Ook daarna bleven heel wat leerlingen steken bij de op te lossen goniometrische vergelijking. De opgave *Asymptoten, perforatie en linkertop* was 'geheel pilot'. Het betreft een familie van gebroken functies met een kwadratische uitdrukking in de teller en een lineaire uitdrukking (met parameter) in de noemer. Bij vraag 6 moet netjes bewezen worden wat de vergelijking van de scheve asymptoot is, alvorens de hoek tussen scheve en verticale asymptoot berekend kan worden. Waar de verticale asymptoot zit, (ook al is dat simpel $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$) doet niet ter zake. Bij vraag 7 vonden sommige leerlingen een (behoorlijk) eenvoudiger oplossing dan die in het cv, waarmee de 7 scorepunten makkelijk te behalen waren. De essentie van die eenvoudige oplossing was gelegen in het feit dat uit '$x = 0$ is een van de oplossingen van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$' geconcludeerd kan worden '$c = 0$'. Hoeveel leerlingen dit inzicht aan de dag hebben gelegd, is niet geïnventariseerd. In vraag 8 wordt getoetst of de leerling weet hoe een perforatie in een grafiek berekend kan worden. Op deze en de vorige twee vragen werd goed gescoord: drie maal een p'-waarde boven de 70. In vragen 9 en 10 kwam de analytische meetkunde aan bod. Het was veel rechttoe-rechtaan-werk: coördinaten berekenen, vergelijkingen opstellen, richtingscoëfficiënten of -vectoren, snijpunten en inproduct berekenen. Bij vraag 13, de derde vraag van de context *Hardheid* scoren de pilotleerlingen opvallend beter dan de reguliere kandidaten (p' = 61 versus p' = 35). Eigenlijk niet gek: vanuit hun kennis van analytische meetkunde zullen de pilotleerlingen eerder een rechthoekige driehoek zoeken, Pythagoras toepassen en vervolgens de daaruit volgende kwadratische vergelijking oplossen. Bij de constructie van vraag 15 is er getwijfeld tussen het al dan niet weggeven van de primitieve functie van *f*. Met de kritiek op vraag 2 uit 2012-1 (pilot) in het achterhoofd is besloten de primitieve nu weg te geven. Gezien de nette gemiddelde score op vraag 15 (p' = 74) was het misschien toch mooier (en denkactiever?) geweest de leerling zelf de – best wel voor de hand liggende – primitieve te laten vinden. In vraag 16, ten slotte, moest een eenvoudige limiet worden uitgerekend. Dat is de pilotleerlingen goed afgegaan. Wellicht kunnen de limieten in toekomstige examens wat uitdagender zijn?

Dit artikel is tot stand gekomen in samenspraak met het CvTE.

Noten

[1] p'-waarde: de in de versnelde correctie waargenomen gemiddelde score van een vraag als percentage van de maximumscore van een vraag.
[2] Zie *www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens*. Hier treft u, behalve de betreffende tabellen, ook de examens, uitwerkbijlagen en correctievoorschriften aan.
[3] WOLF: Windows Optisch Leesbaar Formulier.
[4] Bij de normering is men zich bewust van dit effect en men houdt hier (waar mogelijk) rekening mee bij het vaststellen van de N-termen.
[5] Omdat de aantallen in de tabellen en de grafiek gebaseerd zijn op de aanvragen van scholen voorafgaand aan de examens, zijn deze aantallen, vanwege de marges die scholen daarbij nemen, groter dan de werkelijke.
[6] Zie *www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens/digitale_examens_vmbo/voorbeeldexamens*
[7] Zie *http://oefenen.duo.nl/*
[8] Tjon Soei Sjoe, K., e.a. (2014). Gelijke monniken, gelijke kappen. *Euclides*, *90*(3), 16-20.

Over de auteurs

Ivo Claus, Ger Limpens, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk, Harco Weemink zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van het Cito in Arnhem (*www.cito.nl*). Hun emailadressen zijn achtereenvolgens: *ivo.claus@cito.nl*, *ger.limpens@cito.nl*, *melanie.steentjes@cito.nl*, *ruud.stolwijk@cito.nl* en *harco.weemink@cito.nl*.

T³ NEDERLAND



T³ Nederland Symposium

7 oktober 2015

Onderzoekend leren, laat de leerlingen denken en onderzoeken

NIEUW CURRICULUM

◆

Met o.a. een lezing van Jos Tolboom, leerplanontwikkelaar wiskunde en informatica bij SLO en vele interessante workshops.

◆

Kijk voor het programma en de workshops op de website www.t3nederland.nl en meld u aan!

◆

Locatie: Carlton President Hotel Utrecht
(gratis shuttlebus vanaf station Maarssen)

◆

Tijd: 16.00-21.00 uur

TWENTY FIRST CENTURY SKILLS

STEM

WISKUNDIGE DENKACTIVITEITEN

EXAMENSTAND

T³ NEDERLAND

Teachers Teaching with Technology™

T³ is een groep docenten wiskunde en natuurwetenschappen. Zij zetten zich in om lesmateriaal te ontwikkelen waarbij moderne technologie gebruikt wordt om meer inzicht en betrokkenheid te creëren onder de leerlingen. Daarnaast houdt T³ zich bezig met het ontwikkelen van nieuwe didactische werkvormen in combinatie met technologie. T³ wordt ondersteund door Texas Instruments.

Meer info op we website www.t3nederland.nl of via info@deprojectwinkel.nl

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl.*

Olympiade-team voor thailand

Deze zomer werd in Thailand de Internationale Wiskunde Olympiade gehouden. Bij het redigeren van dit nummer van *Euclides* moest de Olympiade nog plaats vinden, maar begin juni werd al wel bekend wie dit jaar Nederland gaan vertegenwoordigen:

- Eva van Ammers (17 jaar, Amsterdam, 6 vwo Spinoza Lyceum Amsterdam)
- Dirk van Bree (17 jaar, Borne, 6 vwo Twickel College Hengelo)
- Tim Brouwer (18 jaar, Leiden, 6 vwo Da Vinci College Leiden)
- Yuhui Cheng (19 jaar, Rotterdam, 5 vwo WolfertTweetalig Rotterdam)
- Mike Daas (17 jaar, Wormer, 6 vwo St. Michael College Zaandam)
- Bob Zwetsloot (17 jaar, Noordwijkerhout, 6 vwo Teylingen College Noordwijkerhout).

Behalve dit zestal ging Levi van de Pol (13 jaar, Veenendaal, 2 vwo Ichthus College Veenendaal) mee als winnaar van de aanmoedigingsprijs. Deze prijs is bestemd voor een jong aanstormend talent en wordt beschikbaar gesteld door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Levi won begin mei een zilveren medaille bij de Benelux Wiskunde Olympiade, waarmee hij al zijn landgenoten bij deze Olympiade versloeg.
Bron: *wiskundeolympiade.nl*

Spinozapremie voor leidse statiscus

Aad van der Vaart, hoogleraar *Stochastics* aan de Universiteit Leiden, kreeg half juni een van de vier Spinoza-premies van dit jaar. Van der Vaart ontwikkelt statistische technieken om PET-scans te verbeteren en het verband te ontrafelen tussen je genenpakket en de kans dat je kanker krijgt. En mogelijk, in de nabije toekomst, welk medicijn dus het best bij je past. Van der Vaart wil een deel het van geld inzetten om het onderwijs in de statistiek te verbeteren: 'Een idee is om samen met het Leids Universitair Medisch Centrum (LUMC) en Sociale Wetenschappen een master-opleiding *Statistical Science* op te zetten. In Nederland bestaat zo'n opleiding nog niet. Bron: *www.kennislink.nl*

John Nash overleden

Enkele dagen voor zijn 87e verjaardag is John Nash samen met zijn vrouw verongelukt. Nadat hij op 19 mei in Oslo de Abelprijs ontving, kwam de taxi van het vliegveld naar huis bij een inhaalmanoeuvre frontaal in botsing met een tegenligger met het noodlottige gevolg voor het echtpaar. Bron: *www.kennislink.nl*

SMART-finale Kangoeroe 2015

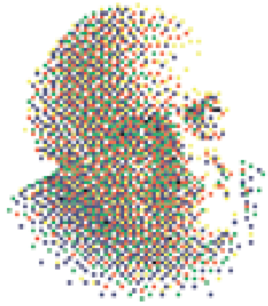


Voor de tweede keer werd dit jaar een SMART-finale van W4Kangoeroe gehouden. Op 11 juni bogen in NEMO Amsterdam de beste 30 deelnemers van groep 7 en van groep 8 zich over zestien meerkeuzevragen en acht open vragen. In groep 7 scoorden Stef Schep (Hoogeveen, 44 punten), Andy Zhang (Eindhoven, 42 punten) en Ivan Balkenende (Amersfoort, 39 punten) het beste. In groep 8 kwamen Roman Shabanov (Gouda, 54 punten), Jonathan Poot (Amersfoort, 52 punten) en Gijs Lagerweij (Boxtel, 44 punten) als besten uit de bus. Maximaal konden 56 punten worden gescoord.
De opgaven zijn te vinden op *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/historie/smart-finale/*. Bron: *www.w4kangoeroe.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

OPEN PROBLEMEN

Susanne Tak
Rogier Bos
Cécile Kleijer



In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. Hier een bijdrage over open problemen zoals die worden ingezet op de U-Talent Academie.

In een welbekend spelletje voor twee spelers pakken de spelers om de beurt een, twee of drie lucifers van een stapel. Ze beginnen bijvoorbeeld met 21 lucifers. De speler die (noodgedwongen) de laatste lucifer pakt heeft verloren. Speler A laat speler B beginnen. Is dat aardig? In dit eenvoudig uit te leggen spelletje zitten aspecten die nog onopgelost zijn. Met dit open probleem, en andere open problemen, laten we op de U-Talent Academie leerlingen aan de slag gaan. De U-Talent Academie is een intensief pre-universitair programma in de bètavakken voor getalenteerde leerlingen uit 5 en 6 vwo, deels uitgevoerd door de Universiteit Utrecht en deels door 27 partnerscholen uit Midden-Nederland. Twee dagen per maand volgen leerlingen onderwijs op de universiteit. Ook op school krijgen de leerlingen aanvullend uitdagend lesmateriaal.

Laten we eerst beredeneren wat bij dit spel een goede strategie is. Als je aan de beurt bent en er ligt nog maar 1 lucifer, dan heb je verloren. We noemen 1 een *v*-positie (*v* voor verliezend). Omdat je 1, 2, of 3 lucifers mag pakken zijn 2, 3 en 4 winnende posities (*w*-posities). Je kunt namelijk vanuit al deze posities de ander op een *v*-positie brengen. Als er 5 lucifers liggen breng je



APS Rekenen en Wiskunde

Ook in het schooljaar 2015-2016 organiseert APS Rekenen en Wiskunde diverse cursussen en studiedagen, o.a.:

8 oktober	Studiemiddag Examentraining rekenen vo/mbo
15 oktober	Studiemiddag De startende rekendocent
6 november	Start cursus De nieuwe wiskundeprogramma's havo/vwo
12 november	Start cursus Toegevoegde waarde van digitale media in de rekenles vo en mbo

U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/agenda

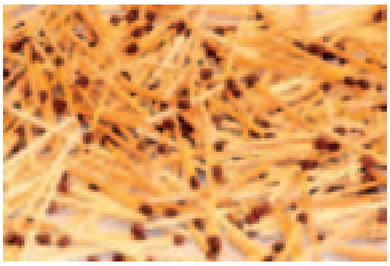
Maatwerk trainingen, coaching en studiemiddagen rekenen/wiskunde. Rekendidactiek, omgaan met verschillen in de rekenles, zwakke rekenaars, nieuwe examenprogramma's wiskunde.

Informatie
APS-Academie
030 28 56 722
academie@aps.nl
www.aps.nl

APS leren inspireren

wat je ook doet de ander op een *w*-positie, dus 5 is een *v*-positie. Kortom: een positie is een *v*-positie, tenzij je de ander met een greep op een *v*-positie kan krijgen. Als we per aantal lucifers 1, 2, 3,... opschrijven wat voor positie het is dan krijgen we de rij *v, w, w, w, v, w, w, w, v, w, w, w, v,* ... Je ziet een eenvoudig zich herhalend patroon ontstaan van *v, w, w, w*. Als je je tegenstander op een positie $4k + 1$ met $k \in \mathbb{N}$ krijgt, dan kun je met slim spel winnen. De conclusie over speler A hierboven is duidelijk.

Maar wat als iedere speler kan kiezen tussen twee, vijf of zes lucifers? We noemen dit *regel* {2,5,6}. Ook nu ontstaat er een zich herhalend patroon, namelijk *v, v, w, w, v, w, w, w, v, w, w*. Het is bewezen dat het patroon van verliezende en winnende posities bij elke regel na enige tijd periodiek wordt.[1] Het is echter nog een open probleem om vanuit elke regel meteen het patroon te voorspellen. Het is ook onbekend hoe groot de periode wordt bij een gegeven regel. Kunt u bijvoorbeeld snel zeggen wat de periode is bij de regel {2,4,7,10}?



Op de U-Talent Academie laten we leerlingen uit 5 en 6 vwo met dit probleem en andere open problemen aan de slag gaan. Wij denken dat leerlingen met open problemen laten werken positieve effecten heeft. Het zorgt voor een houding die niet (alleen maar) gericht is op het vinden van 'het antwoord'. Immers, de leerlingen weten dat het probleem open is. Daarmee verschuift de aandacht naar andere manieren om toch succes te boeken, zoals bijvoorbeeld het oplossen van een deelprobleem of een eenvoudigere variant van het probleem. Hierbij maken we de leerlingen duidelijk dat 'mislukking' ook goed is. Zoals Edison gezegd schijnt te hebben: '*I have not failed. I've just found ten thousand ways that won't work.*'

Om de leerlingen op weg te helpen bij het werken aan open problemen richt het lesmateriaal van de U-Talent Academie zich op het leren van strategieën voor probleemaanpak. We baseren ons hier op het werk van Pólya op dit gebied.[2] Hij onderscheidt in probleemaanpak vier fasen: (i) het probleem/de vraag begrijpen, (ii) een plan maken, (iii) het plan uitvoeren en (iv) het antwoord controleren en terugblikken op het proces. Ook suggereert Pólya heuristieken, die wij hebben ingedeeld bij de verschillende fasen en aangevuld. Een voorbeeld van een heuristiek in de eerste fase is 'lijkt het probleem op een probleem dat je al kent?' en in de tweede fase zijn er onder andere de heuristieken 'los het probleem op voor een bijzonder geval', 'gebruik (wiskundige) hulpmiddelen' en 'begin achteraan / werk achterstevoren'.
Hoe ver komt een leerling hiermee? Een voorbeeld: op de U-Talent Academie heeft een groepje leerlingen gebruikgemaakt van de heuristiek 'los het probleem op voor een bijzonder geval'. Ze onderzochten regels van drie opeenvolgende getallen, zoals {1,2,3}, {2,3,4}, {11,12,13}. Ze ontdekten onder andere dat de grootte van de periode dan altijd de som van het kleinste en het grootste getal in de regel is.
Wilt u zelf eens op onderzoek uit? We raden u de heuristieken 'gebruik (wiskundige) hulpmiddelen' en 'ontdek een patroon' aan. U kunt daarbij gebruikmaken van de door ons ontwikkelde tool.[3]

Naast het luciferprobleem komen in ons lesmateriaal ook andere open problemen aan bod. We achten echter niet alle open problemen geschikt. We hanteren de volgende criteria: (1) het probleem is snel te begrijpen voor leerlingen uit 5/6 vwo, (2) leerlingen kunnen ermee aan de slag, omdat het probleem voldoende mogelijkheden biedt om er heuristieken 'op los te laten' en (3) een succeservaring is mogelijk. Bijvoorbeeld op een speciaal geval van het probleem. Problemen die aan deze criteria voldoen, zijn volgens ons niet alleen geschikt voor de U-Talent Academie, maar ook goed bruikbaar op school. Ze bieden uitdagende mogelijkheden voor een profielwerkstuk voor wiskunde en passen prima binnen wiskunde D. Ze lenen zich ook goed voor een verdiepende opdracht waar de snellere en betere leerling zelfstandig mee aan de slag kan gaan. Onze collectie van open problemen is op aanvraag beschikbaar (zodat u altijd de meest recente versie heeft). Ook zijn we altijd op zoek naar leuke open problemen voor de leerlingen, dus als u suggesties heeft, horen we dat graag (*s.w.tak@uu.nl*). Wij durven er onze handen voor in het vuur te steken dat uw leerlingen warmlopen voor open problemen!

Noten

[1] Byrnes, S. (2003). Poset game periodicity. *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 3*(G3).
[2] Onder andere in zijn boek *How to solve it.*
[3] Zie *www.fisme.science.uu.nl/jcu/problemen/lucifers/lucifers-web.html*

Over de auteurs

Susanne Tak, Rogier Bos en Cécile Kleijer werken bij het Freudenthal Instituut als respectievelijk onderwijsontwikkelaar, docent en curriculumcoördinator voor de U-Talent Academie. E-mailadressen: *s.w.tak@uu.nl*, *r.bos@cgu.nl*, *c.c.Kleijer@uu.nl*

PILOTEXAMEN VWO WISKUNDE A

Erik van Barneveld

Het pilotexamen vwo wiskunde A van dit jaar roept vragen op. Want hoe zit het met de hoeveelheid algebraïsche vaardigheden? Erik van Barneveld analyseert dit examen en stelt ondertussen zelf ook wat vragen.

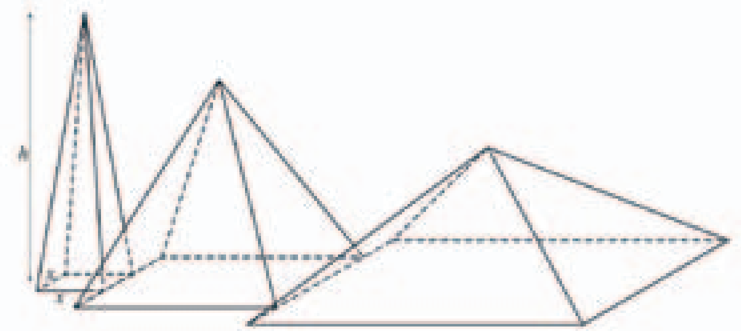
Na afloop van het pilotexamen vwo wiskunde A sprak ik een aantal van mijn leerlingen. Ze vonden het examen moeilijk mede doordat het examen naar hun mening veel algebra bevatte. Tijdens de examenbespreking bleek dat pilotdocenten verschillend aankeken tegen die moeilijkheidsgraad en de hoeveelheid algebra. Laten we de hoeveelheid algebra eens wat nader bekijken. In de syllabus wordt een onderscheid gemaakt in specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.[1] Grof gezegd zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de kandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de kandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen. In dit artikel maak ik een globale analyse van de hoeveelheid specifieke algebraïsche vaardigheden en vergelijk die met de hoeveelheden in de examens van 2012 tot en met 2014 als een poging om een nadere dialoog op gang te brengen over de algebra in de pilotexamens vwo wiskunde A. De pilotdocenten waren het erover eens dat de lengte en de leesbaarheid van dit examen goed was. Het examen bestond uit zes opgaven waarvan de laatste, zoals gebruikelijk, een korte onderzoeksopgave was. Hieronder een drietal voorbeelden van het gebruik van specifieke algebraïsche vaardigheden in het examen.

Piramiden – Deze opgave maakte gebruik van de context kunst. De eerste drie onderdelen van deze opgave zaten in de overlap met het reguliere wiskunde A examen; het vierde onderdeel was pilotspecifiek. In het derde onderdeel werden specifieke algebraïsche vaardigheden getoetst, zie figuur 1.

Bevingen in Japan – De opgave gaat over zeebevingen en de consequenties ervan. De onderdelen 13 en 14 zaten in de overlap met het reguliere examen. De onderdelen 15 en 16 waren pilotspecifiek. In de onderdelen 14 en 16 werden specifieke algebraïsche vaardigheden getoetst, zie figuur 2.

Snoeken – Deze opgave zat alleen in het pilotexamen, zie figuur 3.

In totaal kwam ik tot vijf onderdelen waarin specifieke algebraïsche vaardigheden werden getoetst. Met deze onderdelen konden de leerlingen 18 punten behalen. Op het totale puntenaantal van dit examen (79) is dit dus ongeveer 23%.
Door op analoge wijze naar de examens van 2012 tot en met 2014 (steeds het eerste tijdvak) te kijken, kwam ik tot de volgende tabel.



De kunstenaar maakt een nieuw ontwerp. Hij wil de breedte van het grondvlak van de piramiden constant houden en zowel de lengte als de hoogte laten veranderen.
In zijn nieuwe ontwerp is de breedte van het grondvlak van een piramide gelijk aan 2 dm en de lengte van dat grondvlak gelijk aan x dm. Voor de hoogte in dm van een piramide neemt hij weer: $h = 9 - ax$.
Voor de inhoud van een piramide in dit nieuwe ontwerp geldt dan de formule:

$$I = 6x - \frac{2}{3}ax^2$$

3p **3** Toon dit aan door deze formule af te leiden uit de gegevens.

figuur 1 Uit: pilot vwo A 2015 (Piramiden)

Bij een beving komt heel veel energie vrij. Hiervoor wordt een andere formule van Richter gebruikt:

$$M = 0{,}67 \cdot \log(E) - 0{,}9$$

Hierin is E de vrijkomende energie in kilojoule en M de magnitude op de schaal van Richter.
Door deze formule te combineren met de formule $M = \log(A) + 3$ is het mogelijk een verband op te stellen tussen de vrijkomende energie E en de maximale amplitude A.
Het verband tussen E en A is te schrijven als:

$$\log(A) + 3 = 0{,}67 \cdot \log(E) - 0{,}9$$

Dit verband kan vereenvoudigd worden tot de vorm $E = 10^{p \cdot \log(A) + q}$.

4p 16 Bereken de waarden van p en q in deze formule. Rond p en q af op twee decimalen.

figuur 2 Uit: pilot vwo A 2015 (Bevingen in Japan)

Snoeken

De snoek is een grote zoetwatervis. Het is één van de bekendste roofvissen in Nederland en wordt veel gevangen door sportvissers.

Nederlandse sportvissers meten de lengte van hun vangst. In het buitenland zijn de vissers vaak meer geïnteresseerd in het gewicht van een vis. Dat gewicht is lastig te bepalen aan de waterkant. Voor snoeken is er een eenvoudige formule die het verband tussen lengte en gewicht beschrijft:

$$G = 0{,}003 \cdot L^{3{,}206}$$

Hierbij is G het gewicht in gram en L de lengte in cm.

4p 17 Herschrijf de formule in de vorm $L = a \cdot G^b$ met a en b in één decimaal nauwkeurig.

figuur 3 Uit: pilot vwo A 2015 (Snoeken)

Examen	Totaal aantal punten	Specifieke algebra onderdelen (punten)	Aantal onderdelen	Punten als percentage van het totaal
2012	81	4(4), 12(3)	2	9%
2013	83	14(4), 16(3), 20(3)	3	12%
2014	84	17(5)	1	6%
2015	79	3(3), 6(4),14(3),16(4),17(4)	5	23%

Deze tabel laat zien dat de examens van 2012 tot en met 2015 sterk wisselende hoeveelheden specifieke algebra bevatten, waarbij het examen van 2015 opvalt door het grote aantal onderdelen waarin specifieke algebraïsche vaardigheden worden getoetst en het relatief groot aantal punten dat de leerlingen met specifieke algebraïsche vaardigheden konden behalen.

Hoe kan dat nou?

Volgens mij vormt de moeizame positionering van het vak wiskunde A op het vwo de belangrijkste verklaring. In het eindrapport van cTWO staat dat het niet goed mogelijk is gebleken een invulling te geven aan wiskunde A die zowel past bij het EM-profiel als bij het NG-profiel (conclusie 4).[2] In de visie van cTWO moet steeds een balans worden gezocht tussen enerzijds wiskunde als zelfstandige discipline – als denkwijze waarin abstraheren, generaliseren en formeel manipuleren een grote rol spelen – en anderzijds wiskunde als instrument voor het modelleren van probleemsituaties, als hulpmiddel dat toegepast wordt in praktische, technische en wetenschappelijke situaties. Dit duale karakter van de wiskunde komt bij wiskunde A op het

vwo door de verschillende doelgroepen die het vak moet bedienen wel heel sterk naar voren.
Om bovengenoemde balans te waarborgen heeft cTWO zes wiskundige denkactiviteiten benoemd die de kernconcepten uit de schoolwiskunde (getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval) met elkaar zouden moeten verbinden:

- Modelleren en algebraïseren;
- Ordenen en structureren;
- Analytisch denken en probleem oplossen;
- Formules manipuleren;
- Abstraheren;
- Logisch redeneren en bewijzen.

Deze zes wiskundige denkactiviteiten zijn opgenomen in subdomein A3 van de nieuwe examenprogramma's. Volgens cTWO kan in de specificaties per schooltype, per profiel en per wiskundevak, de bijbehorende balans en diepgang worden aangegeven. De specificaties voor vwo wiskunde A zijn echter kennelijk nog zo ruim dat dit ruimte laat voor sterk wisselende hoeveelheden specifieke algebra in de examens.

Wat vind ik ervan?

In een eerder stadium hebben pilotdocenten en hun leerlingen aangegeven dat zij meer duidelijkheid wensen over het niveau waarop diverse algebraïsche vaardigheden beheerst zouden moeten worden. Ik zou graag willen toevoegen: niet alleen duidelijkheid over het niveau maar vooral ook over de omvang. Van het beoogde niveau kun je een goede indruk krijgen door de voorbeeldopgaven in de syllabus. Voor de omvang ontbreekt een dergelijk ijkpunt. Vanuit het oogpunt van leerlingen lijkt mij het begrijpelijk dat zij willen weten waar ze voor kiezen als ze voor het vak wiskunde A kiezen. Moet je dan als leerling denken aan een programma waarbij uiteindelijk een kwart van de punten op het examen te behalen is met specifieke algebraïsche vaardigheden of een vak waarbij dit percentage rond de 10% ligt? In verband met de invulling van je lessen wil je dit als docent natuurlijk ook graag weten. De examens van de afgelopen vier jaren geven wat dit betreft weinig houvast voor leerlingen en docenten.

Hoe verder?

Het is in de afgelopen jaren niet eenvoudig gebleken het idee van de wiskundige denkactiviteiten te operationaliseren en volgens mij zitten we nog midden in dit proces. In zijn oratie gebruikt Drijvers als werkdefinitie: wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.[3] Terecht schrijft hij dat: 'als wiskundig denken een grotere plaats moet krijgen in het wiskundeonderwijs, dan moet dit ook zichtbaar worden in de toetsen, die immers hun schaduw vooruitwerpen op het onderwijs.' Uit een inventarisatie van Van Streun blijkt dat de pilotexamens bij de nieuwe wiskundeprogramma's slechts in beperkte mate beroep doen op wiskundig denken.[4] Gelet op de richtinggevende werking van de examens verdient het daarom volgens Drijvers aanbeveling om bij de examenconstructie wat meer durf te tonen op dit gebied. Een aanbeveling die ik graag onderschrijf. Voor de verdere toekomst staan twee interessante aanbevelingen in het eindrapport van cTWO. Ten eerste wordt aanbevolen een permanente curriculumcommissie in te stellen die zorg draagt voor het wiskundeonderwijs (aanbeveling 9). In deze curriculumcommissie kunnen afgenomen examens continu, systematisch en grondig op verschillende aspecten geëvalueerd worden. De tweede aanbeveling is om op termijn de invoering van twee robuuste wiskundevakken te overwegen, wiskunde α voor de maatschappijprofielen en wiskunde β voor de natuurprofielen (aanbeveling 10). Ik denk dat cTWO een goede aanbeveling heeft gedaan waarmee op termijn een einde kan komen aan de situatie dat leerlingen in het EM-profiel hetzelfde wiskunde-examen afleggen als leerlingen in het NG-profiel.

'VOOR DE OMVANG ONTBREEKT EEN DERGELIJK IJKPUNT'

Noten

[1] Zie *www.hetcvte.nl/item/wiskunde_havo_vwo*
[2] cTWO (2012). *Denken en doen: wiskunde op havo en vwo per 2015.* Utrecht: Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. Zie *www.ctwo.nl*
[3] Drijvers P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT* (oratie). Universiteit Utrecht. Zie *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf*
[4] Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO.

Over de auteur

Erik van Barneveld is werkzaam als docent op de Goudse Scholengemeenschap Leo Vroman te Gouda. Hij bedankt collega Ilse de Jong voor haar waardevolle commentaar op eerdere versies van dit artikel. E-mailadres: *E.vanBarneveld@gsgleovroman.nl*

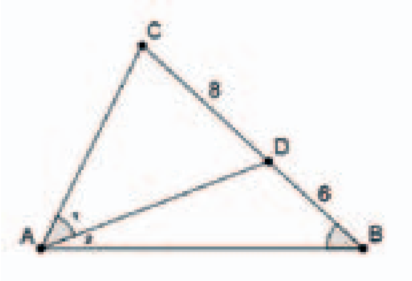
DE WORTEL UIT EEN GEHEEL GETAL IS EEN BREUK...

Luuk Koens

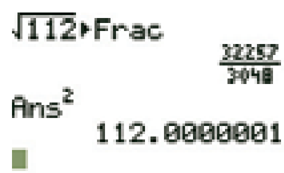
Iedere docent beleeft wel eens opvallende, verrassende of inspirerende momenten in een les. Luuk Koens deelt zo'n moment met ons.

Het begon met de bespreking van een opgave uit een proefwerk. In driehoek *ABC* ligt het punt *D* op de zijde *BC* zo dat *BD* = 6, *CD* = 8 en hoek *CAD* = hoek *B*, zie figuur 1. Bereken exact de lengte van *AC*. Met behulp van gelijkvormigheid was $AC = \sqrt{112}$ snel gevonden, maar dat moest worden herleid. De meesten kwamen wel op het correcte antwoord $AC = 4\sqrt{7}$. Een leerling verbaasde me met $AC = 10\frac{1777}{3048}$. Dit vroeg om uitleg.

De rekenmachine, een TI84 was gebruikt en inderdaad, die leverde $\sqrt{112} = \frac{32257}{3048}$, zie figuur 2. De tien helen werden er nog even 'met de hand' uitgehaald want dat leek het toverdoosje niet te kunnen. Simpel kwadrateren overtuigde de leerling van de onjuistheid van het antwoord. Maar hoe komt het dat de rekenmachine zo'n fout maakt? Een breuk is toch exact? Waarom zag ik meteen dat het antwoord niet goed kan zijn? Een mooie aanleiding voor een gesprekje over de beperkingen van een rekenmachine die in slechts veertien decimalen rekent (en daarvan hooguit tien laat zien) en de 'slimme' algoritmes waarmee een decimaal getal in een breuk wordt omgezet. Ten slotte vertelde ik natuurlijk over de



figuur 1



figuur 2

arme Hippasos, die naar verluidt had ontdekt dat $\sqrt{2}$ niet als breuk is te schrijven. Voor het bekendmaken daarvan is hij voor straf overboord gegooid en is hij verdronken in de Middellandse zee.
In de docentenkamer lag een niet-grafische rekenmachine van hetzelfde merk, een TI-30XB: $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$, mijn verbazing was compleet. Een opvolger van de veelgebruikte TI-84 zal ook wel kunnen wortelrekenen en mijn leerlingen niet. Wil ik dit? Wat is het volgende waar ik tegenaan loop?

Over de auteur

Luuk Koens is docent wiskunde aan het A. Roland Holst College te Hilversum. E-mailadres: *lkoens@gsf.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

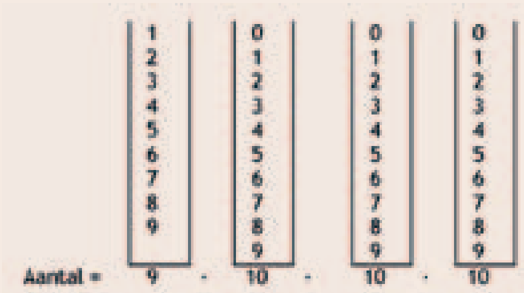
TELPROBLEMEN

In de tweede klas van het vwo behandelen we aan het einde van het schooljaar telproblemen. In de methode *Getal en Ruimte* worden vier manieren aangeboden om deze problemen op te lossen:

- Wegendiagram
- Boomdiagram
- Rooster (voor dobbelstenen)
- Systematisch noteren.

Het rooster is niet bruikbaar bij problemen met letter- of cijfercodes en de andere drie methoden zijn vaak veel werk. Een oud-collega leerde mij de 'bakjes'-methode.

Voor een pincode van vier cijfers tekenen we dan vier bakjes. Boven elk bakje komt te staan welke getallen of letters er in dat bakje mogen; eronder komt te staan hoeveel mogelijkheden dat zijn. Bij de vraag hoeveel pincodes er zijn waarbij het eerste cijfer geen 0 mag zijn, hoort dan deze tekening:



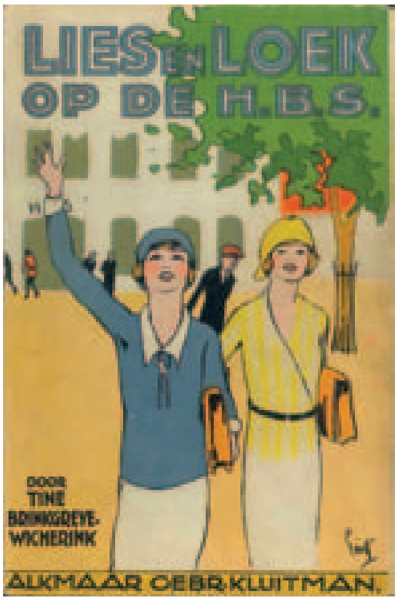
Lonneke Boels

GETUIGEN

DE HBS IN MEISJESBOEKEN

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



figuur 1 Omslag van Tine Brinkgreve Wicherink, *Lies en Loek op de HBS* (1918)

Een van de meest succesvolle Nederlandse schooltypen van de vorige eeuw was zonder meer de HBS. Opgericht als onderdeel van de scholing voor de middenklasse in 1863, was de 'Hoogere Burgerschool met vijfjarige cursus' al snel dusdanig succesvol dat andere schooltypen (zoals de HBS-3) uit deze wet in vergetelheid raakten. Wis- en natuurkunde waren, naast de moderne talen, van begin af aan de kernvakken van de HBS.

Wie wil weten hoe het onderwijs aan zo'n HBS begin twintigste eeuw verliep, kan door lesboeken bladeren en ooggetuigenverslagen lezen. Probleem met die bronnen is dat lesboeken weinig vertellen over wat er precies gebeurde en dat het veelal succesvolle HBS'ers zijn die brieven en dagboeken schreven, vaak ook nog jaren na dato. Dagboeken en brieven uit de periode rond 1900 zijn geen gemakkelijke bron. Die werden namelijk geschreven om gelezen te worden door het hele gezin of zelfs een hele familie. Zodoende kwam zeker niet alles ter sprake, en wat wij nu lezen als 'persoonlijke ontboezemingen', had veelal een functie, zoals het uitvergroten van gewenste karaktereigenschappen.

Een mooie aanvulling en inkleuring van het beeld dat uit genoemde bronnen naar voren komt, treft men aan in vroeg twintigste-eeuwse meisjesboeken. De meisjes uit die periode werden in lectuur getrakteerd op prettig herkenbare verhalen uit hun dagelijks leven, waarin hen een spiegel werd voorgehouden met betrekking tot gewenst gedrag en levenshouding. Waar jongensboeken veelal vol stonden met stoere indianenverhalen waar weinig realiteit aan te pas kwam, kon men in meisjesboeken dus glimpen opvangen van de HBS: zowel in het leven van de meisjes, als in dat van andere romanfiguren. Zodoende bevond ik mij tijdens een vakantie tussen de meisjesboeken uit de eerste helft van de vorige eeuw, in een poging om iets meer te leren over de beleving van de HBS door tijdgenoten. Het viel niet mee om de meewarige blikken en de nauwelijks verborgen minachting van kinderen en echtgenote te negeren, maar de paar citaten die ik uiteindelijk vond, waren het waard.

Een eerste beeld dat in de meisjesboeken bevestigd werd is dat de HBS vooral voor jongens was. In Carry van Bruggen's *De klas van twaalf* uit 1926 gingen de meisjes naar de kweekschool om onderwijzeres te worden. Ook daar werd flink gerekend, maar tegen de HBS keken zij op. De HBS was voor slimme jongens die in dit boek figureerden. En de hele knappe koppen konden zelfs naar het gymnasium. Datzelfde beeld kan men terugvinden in *Goud-Elsje* (1946) van Max de Lange-Praamsma (1906-1990). De hoofdpersoon leerde graag en haalde altijd goede rapporten. Na haar diploma van de driejarige HBS ging ze echter werken, om haar ouders financieel te helpen. De opleiding van haar jongere broer, die het gymnasium deed, ging voor.

In de gegoede middenklasse in het westen van ons land was het begin twintigste eeuw goed gebruik om ook meisjes naar de HBS te sturen. Vandaar ook het bestaan

van meisjesboeken met HBS-meisjes in de hoofdrol. Er waren verschillende redenen om meisjes naar de HBS te sturen. Zeer vooruitstrevende ouders wilden meisjes dezelfde mogelijkheden bieden als jongens. Gematigd progressieve ouders vonden dat ook de toekomstige huisvrouw en moeder in staat moest zijn om haar kinderen, tijdens hun gang door de HBS of het gymnasium, met raad en daad bij te staan. Vele moeders zullen zich eind negentiende, begin twintigste eeuw overvraagd hebben gevoeld door hun kinderen op de HBS. Met name wis- en natuurkunde waren geen vast element geweest in hun opleiding. Dat realiseerde ik mij althans toen ik een dergelijke situatie tegenkwam in *Lies en Loek op de HBS.* Toen de jongste dochter Loek naar haar toelatingsexamen HBS vertrok:

Peinzend keek Ma haar na. Haar jongste nu ook al de lagere school ontwassen! Hoe vlug ging de tijd; haast **te** vlug! 't Heugde haar nog als de dag van gisteren, dat ze Lies voor het eerst naar de meisjesschool bracht: nu trok het kind er iederen morgen op uit met een reusachtig pak boeken onder den arm, en zat ze 's avonds te studeeren, het hoofd op de handen, soms de vingers in de ooren. Ze kon vragen doen over het werk, gewend en overtuigd dat Ma alles wist –waar Ma geen antwoord op had, of een aarzelend. Ze praatte over algebra, stelkunde, planimetri, lexicologische oefeningen, dat het Ma soms duizelde. En nu ging Loekie, de Benjamine, denzelfden weg!

In alle boeken waren de succesvolle HBS'ers hard werkende kinderen, die braaf en vlijtig veel huiswerk maakten. De enige uitzondering was Joop ter Heul, die een bijles-lerares kreeg omdat ze anders onvoldoende aan haar werk toekwam. Uiteindelijk leerde ook zij dat ijver en oplettendheid belangrijk waren. Een vriendin van *Goud-Elsje* die met een slecht rapport thuiskwam (Vier vijven! En nog wel voor Algebra, Nederlands, Natuur- en Scheikunde. En een vier voor Meetkunde! Wat afschuwelijk!) kreeg hulp. Uiteraard werd ijver beloond. In *De HBS-tijd van Joop ter Heul* van Cissy van Marxveldt werd in de vorm van een dagboek/brievenroman verhaald hoe ouders er streng op toezagen dat er hard gewerkt werd. Samen huiswerk maken, daar hield de vader van Joop ter Heul helemaal niet van. Waarschijnlijk had hij zijn dochter door. Die dochter is uiteindelijk te eerlijk om onder haar werk uit te willen komen. Joop hield overigens van algebra, zo leren we uit een bijzinnetje.
Een gewoonte die uit de boeken naar voren kwam is dat docenten soms bijnamen kregen van leerlingen. Een gewoonte die ik in interviews met dames die in de jaren vijftig op school zaten overigens bevestigd kreeg: of zij door deze boeken gestimuleerd waren, is lastig te zeggen. Van wiskundedocenten trof ik relatief weinig bijnamen aan. Betekent dit dat het kleurloze figuren waren? Of is dit juist een gunstig teken? In *Lies en Loek* is de docent wiskunde een dikke man met een puntbaard en



figuur 2 Titelblad van Cissy van Marxveldt, *De HBS-tijd van Joop ter Heul* (1919)

een spraakprobleem. Hij is de enige wiskundedocent met bijnaam die ik tegenkwam en dat was in elk geval niet gunstig: leerlingen noemden hem 'de big'.

In alle boeken figureerden geweldige docenten, maar elke school had ook een paar kneuzen. De gepromoveerde doctor in de wis- en natuurkunde Smidt, die Joop ter Heul voor de natuurkundeles had, werd danig door de klas voor de gek gehouden. Ook de gymdocent moest het ontgelden. Zij kregen de hand boven het hoofd gehouden door een strenge directrice, die de bijnaam 'de generaal' had gekregen.
Het grootste deel van de meisjesboeken ging over 'meisjesproblemen', of zaken waar de toekomstige meisjes zich mee bezig zouden moeten houden. De hoofdfiguren ontmoetten verschillende mensen die goede of slechte eigenschappen uitvergroot representeerden. Het hoofddoel van de meisjesboeken was niet om een scherp beeld van de HBS-tijd neer te zetten. Juist dat gegeven maakt de paar opmerkingen over de wiskundelessen, het ontzag voor algebra en meetkunde, de vanzelfsprekende aanwezigheid van wiskunde, zo waardevol. De HBS fungeerde slechts als achtergrond, maar als zodanig moest ze herkenbaar en geloofwaardig zijn. Wie iets over de HBS voor 1950 wil leren, moet elders beginnen, maar zal uiteindelijk toch meisjesboeken moeten gaan lezen!

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

VWO B-PILOTEXAMEN

Ilone Dekkers

Het wiskunde B-pilotexamen bevat voor een deel dezelfde opgaven als het reguliere examen. Ilone Dekkers bespreekt de opgaven die juist alleen in het pilotexamen voorkomen, deze geven immers de beste indicatie voor de veranderingen die ons te wachten staan.

Inleiding

In de afgelopen jaren hebben we veelvuldig bij elkaar gezeten met de doorloopscholen, voorheen pilotscholen genoemd. We onderwijzen al ruim vijf jaar de nieuwe stof, die nu is verwerkt in de methodes. Komend schooljaar gaat het hele land deze vernieuwingen binnen de wiskunde invoeren. Over drie jaar volgt dan automatisch het eerste vernieuwde examen voor alle leerlingen vwo. Geen synthetische meetkunde meer, maar analytische meetkunde met onder andere vectormeetkunde, bewegingen in combinatie met parametervoorstellingen, cirkels en parabolen met hun raaklijnen. Daarnaast meer aandacht voor inverse functies en limieten in combinatie met het asymptootbegrip. Wiskundige denkactiviteiten moeten daarbij een belangrijk speerpunt vormen: leerlingen moeten actiever aan het denken worden gezet en zelf meerdere stappen bedenken om tot een goede oplossing te komen bij een vraagstuk.
Voor de vierde keer werd dit jaar het pilotexamen afgenomen. Hieronder de opgaven uit het examen, met extra aandacht voor de vernieuwingen.

Het examen

Opgave 1 was ook in het reguliere examen de openingsopgave. Een 'rechttoe rechtaan' opgave als opwarmertje, waarbij twee vlakdelen een gelijke oppervlakte moesten hebben voor een te berekenen parameter als (verticale) grenswaarde tussen de gebieden. Het enige wat ik vooraf dacht was: 'Veel punten voor een eerste opgave en ook meteen een parameter erin.' Een parameter schrikt 6 vwo echter niet meer af! Bijna alle leerlingen maakten deze opgave goed, getuige een p'-waarde van 0,9 in mijn klas. *Wortelfuncties* gaat, alleen bij de pilot, verder met opgave 2, zie figuur 1. Toch vind je hierin niet meteen een vernieuwing terug. Dit had regulier ook gevraagd kunnen worden. Op het correctievoorschrift (cv) staat echter geen mogelijkheid met behulp van vectoren, terwijl leerlingen die wel gebruikten. Hierbij kun je wel een denkactiviteit bedenken, want er moeten een paar stappen bedacht en gemaakt worden. Jammer is dan dat altijd de plaatjes gegeven worden. Leerlingen kunnen dit ook zelf. Het scheelt ze wel tijd en ze hebben een basis die goed is om mee te starten! Veel leerlingen liepen echter meteen vast, want de transformaties werden er geregeld bij gepakt en dan kom je echt niet verder! Op het eerste gezicht een makkelijke opgave, maar toch niet goed gemaakt met een p'-waarde van 0,5.
De twee volgende opgaven uit *Cirkels en lijnstuk* stonden identiek in het reguliere examen en zijn goed gemaakt. Met behulp van de bewegingsvergelijkingen van beide cirkels moest worden bewezen dat punt A zich op de lijn $y = x$ bevond als B zich op de x-as bevindt. De volgende vraag was het bepalen van een tijdstip waarop lijnstuk AB horizontaal loopt en het tekenen hiervan. Opgave 5 is een opgave uit de vernieuwing, zie figuur 2, maar is bij mij het slechtste gemaakt met 0,4 als p'-waarde. Je loopt namelijk meteen vast als je vector OA bepaalt en met behulp daarvan vector AB loodrecht opstelt, ofwel

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$ en loodrecht geeft dan

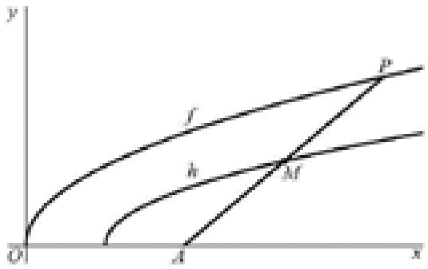
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \text{ of } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Dit is in de verwerking in de klas veel voorgekomen in de opgaven en zit er bij de leerlingen ingeslepen. In de vernieuwde stof werd namelijk veelal gebruikgemaakt van één vector waarmee dan loodrecht verder gerekend moest worden zoals hierboven staat beschreven. Vector AB moest in het examen echter uit de beide bewegingsvergelijkingen opgesteld worden. Samen met vector OA kun je dan met het inproduct berekenen wat het tijdstip moet zijn, door tevens gebruik te maken van de gonio-formules. Het was dus snel nul punten als je het begin mist.
Asymptoten, perforatie en linkertop stond alleen in het pilotexamen, zie figuur 3. Er is op dit onderdeel namelijk meer aandacht gevestigd ten opzichte van het huidige programma. Bij opgave 6 moet de scheve asymptoot eerst bepaald worden, wat veel is geoefend en wat je ook terugzag in de veelal goede uitwerkingen, om vervolgens de hoek te kunnen berekenen. Als vernieuwing zou je hiervoor de inproductregel voor vectoren kunnen gebruiken, maar dat doen weinig leerlingen als het ook makkelijk en veel vertrouwder met de tangens kan. Opgave 7 waren erg veel punten voor het geringe werk dat gedaan moest worden. Een deel uit het cv kon namelijk achterwege worden gelaten, want daarin stond de gehele berekening van de x-coördinaat met behulp van de abc-formule. Terwijl $f'(0) = 0$ meteen het goede, en enige, antwoord gaf. Opgave 8 was op te delen in twee

stukken. De x-coördinaat van de perforatie vinden was eenvoudig, maar de daadwerkelijke coördinaten berekenen vergde een vereenvoudiging van de oorspronkelijke functie wat veel fout ging of werd vergeten. Ook *Loodrecht* stond niet in het reguliere examen. Opgave 9 is op te lossen door het snijpunt van de lijnen OC en AD te berekenen, zie figuur 4. Enkele leerlingen gebruiken vergelijkingen, omdat ze daar zo vertrouwd mee zijn vanaf klas 1. Het is echter veel eenvoudiger om gebruik te maken van de vectorvoorstellingen van deze lijnen. Een andere mogelijkheid is door het zwaartepunt te bepalen, wat punt E is als je (ongelijke) massa's in de hoekpunten O, A en B bedenkt. Bij enkele doorloopscholen werd zelfs de gegeven y-coördinaat van punt E genomen en daarmee de x-coördinaat berekend. Erg slim, maar niet de bedoeling dachten we. We konden het echter niet fout rekenen...
Opgave 10 ging weer over loodrecht, net als opgave 5. Jammer dat dezelfde techniek wordt gevraagd maar hier geen moeilijk bewijs.
Opgave 11 tot en met 14 over *Hardheid* stond ook in het reguliere examen. Het ging hierbij vooral om algebraïsche vaardigheden die werden getoetst, maar dan wel binnen een context. De enige van dit examen! Erg natuurkundig, maar leerlingen zonder dit vak hebben de opgave

Gegeven is het punt $A(2, 0)$. Bij elk punt P op de grafiek van f kan het midden van lijnstuk AP worden bepaald. Dat midden noemen we M.
Verder is de functie h gegeven door $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$.
In figuur 2 zijn de grafieken van f en h getekend. Ook is voor een punt P het lijnstuk AP met midden M getekend.

figuur 2



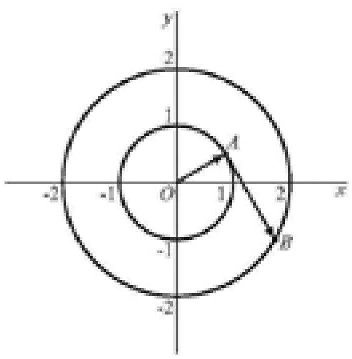
Er geldt: voor elk punt P op de grafiek van f ligt het punt M op de grafiek van h.

4p 2 Bewijs dit.

figuur 1 Uit: vwo B pilot (Wortelfuncties)

Op het interval $\langle 0, \pi \rangle$ is er één tijdstip waarop lijnstuk AB raakt aan de kleinste cirkel. Zie figuur 4.

figuur 4



Op dit tijdstip staat de vector $\overrightarrow{AB}$ loodrecht op de vector $\overrightarrow{OA}$.

6p 5 Bereken exact dit tijdstip.

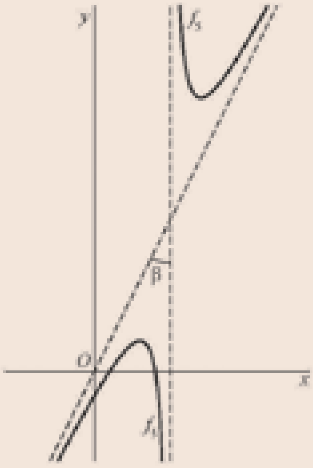
figuur 2 Uit: vwo B pilot (Cirkels en lijnstuk)

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{4x^2 - 10x + 4}{2x - a} \quad \text{met } x \neq \tfrac{1}{2}a$$

De grafiek van f_5 heeft een verticale asymptoot en een scheve asymptoot. De twee asymptoten snijden elkaar onder een hoek β met β in graden. In de figuur is de grafiek van f_5 met de asymptoten en hoek β weergegeven.

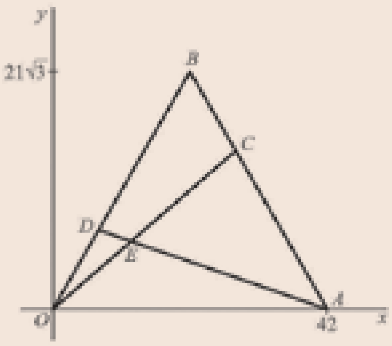
figuur



4p 6 Bereken algebraïsch de waarde van β.

figuur 3 Uit: vwo B pilot (Asymptoten, perforatie en linkertop)

figuur 1



Punt E heeft coördinaten $E(12, 6\sqrt{3})$.

7p 9 Laat met exacte berekeningen zien dat de x-coördinaat van E inderdaad gelijk is aan 12.

figuur 4 Uit: vwo B pilot (Loodrecht)

daardoor niet slechter gemaakt, is de indruk van de doorloopscholen. Opgave 12 wederom een (makkelijke) integraal, opgave 13 een afleiding van een formule geven en opgave 14 is 'leuk' voor wiskunde A, maar echt te 'flauw' voor wiskunde B naar mijn idee. Het was namelijk de bedoeling om drie formules te combineren en daaruit één onbekende op te lossen, dit mocht zelfs met de grafische rekenmachine. Bij wiskunde B was algebraïsch gepaster geweest! Bij de eerste drie opgaven ging het om het 'bewijzen' van een gegeven formule. Er zijn nog altijd leerlingen die kijken naar de formule en van daaruit een onzinverhaal gaan ophangen. Van de andere kant: lukt het ze wel, dan kunnen ze met een gerust hart verder en weten ze dat de opgave goed is gemaakt. Ik snap dat als leerlingen er niet uitkomen, ze toch verder kunnen om de laatste opgave te maken, maar er zijn creatievere oplossingen te verzinnen. De laatste opgave *Symmetrisch gebied* stond alleen in het pilotexamen, zie figuur 5. Een afsluitende opgave die niet moeilijk was en erg goed is gemaakt. Jammer dat opgave 15 wederom een integraal bevatte. Maakten de leerlingen geen gebruik van de symmetrie in de figuur, dan werd er een beroep gedaan op de vaardigheid van het optellen van twee breuken met ongelijkwaardige noemer. De laatste opgave was een vernieuwing: limietgebruik. In het nieuwe programma wordt hier niet heel diep op ingegaan, zoals sommigen wellicht bij wiskunde D krijgen. Om *L* te berekenen is het namelijk al voldoende om een groot getal in te vullen op de plek van *p*. Ook de limietnotatie stond niet in het cv.

Algemene indruk

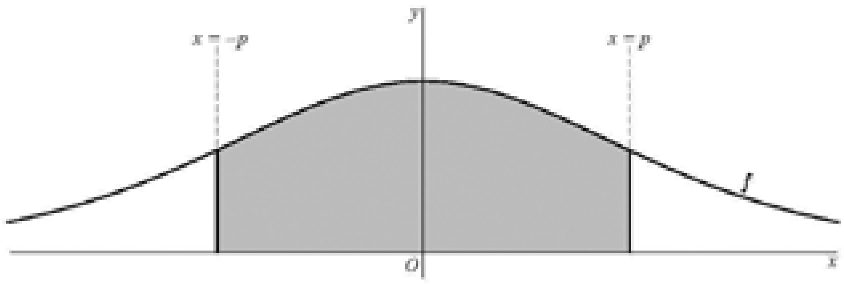
Maar liefst zeven van de zestien opgaven waren in zijn geheel gelijk aan het reguliere examen. Voorgaande jaren zag je duidelijk al dan niet kleine verschillen in vraagstelling of (in het missen van) beschikbare gegevens. Vooral de denkactiviteiten kwamen erg minimaal aan

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Gegeven is p, met $p > 0$. In de figuur is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijking $x = -p$ en $x = p$ grijs gemaakt.

figuur



De oppervlakte van dit gebied noemen we $A(p)$.

Een primitieve F van f wordt gegeven door $F(x) = \dfrac{-1}{e^x+1}$.

Er geldt: $A(p) = 1 - \dfrac{2}{e^p+1}$

4p **15** Bewijs met behulp van de gegeven primitieve functie dat inderdaad geldt: $A(p) = 1 - \dfrac{2}{e^p+1}$

Als p onbegrensd toeneemt, nadert $A(p)$ tot een limietwaarde L.
Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ de helft is van L.

4p **16** Bereken exact deze waarde van p.

figuur 5 Uit: vwo B pilot (Symmetrisch gebied)

bod dit jaar. Daarbij werd bij drie opgaven gebruikgemaakt van integralen, wat niet in verhouding staat met de hoeveelheid te leren stof. Tevens twee opgaven die te maken hebben met het bewijzen van loodrechte lijnstukken en vectoren. Jammer, want er is zoveel meer te halen uit de nieuwe meetkunde. De bewegingen worden bijvoorbeeld alle jaren nauwelijks getoetst. Je krijgt een (enkele) bewegingsvergelijking, wat voorheen meestal een Lissajous was, en rekent daarmee. Dat deden we echter al in de 'oude' stof. Erg verrassend dat er geen 'normale' exponentiële, dan wel logaritmische functie voorkwam dit jaar! In de *WiskundE-brief* is dit ook al genoemd. Met dit onderdeel kun je algebraïsch zoveel kanten op en het is tevens zo vaak behandeld in de les, dat het bijna onmogelijk niet gevraagd kan worden in een examen. Spreiding van de te toetsen stof binnen een examen kan en moet beter in de toekomst! Niet meerdere opgaven over (ongeveer) dezelfde vaardigheid, maar zorgen voor meer afwisseling.

Wiskundige denkactiviteiten

De stap die we hadden gezet is dit jaar niet opnieuw naar voren gekomen. Er was niet één opgave die eruit sprong en veel punten opleverde voor dit onderdeel. Er is veel aandacht aan besteed tijdens scholingen en het had prominenter aan bod moeten komen. Een gemiste kans! Het hoeft daarbij niet altijd een moeilijke (bij voorkeur laatste) opgave te zijn, maar leerlingen zelf een plan van aanpak laten verzinnen om tot de goede oplossing te komen, is zeker ook een toegevoegde waarde voor bijvoorbeeld vervolgstudies. Leerlingen zijn tot meer in staat dan dat wij denken! En ja, dit vergt training, maar daar kun je ze drie jaar in de bovenbouw op voorbereiden door veel samen te oefenen. Dit kan de (betere) leerlingen ook een prikkel en genoegdoening geven als het uiteindelijk lukt.

Over de auteur

Ilone Dekkers is docente wiskunde bovenbouw aan het Peellandcollege in Deurne. E-mailadres: *dei@ivo-deurne.nl*

MEDEDELING

FINALE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 18 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 156 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een lezing van Paul Levrie en Rudi Penne, auteurs van het boek De pracht van priemgetallen. Vanaf maandag 21 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 13 november bekend gemaakt tijdens de prijsuitreiking.

Alweer verrijkt.
Nog steeds gratis.



Onze website breidt zich steeds weer uit met superpraktische **kaarten**.
Zet deze kaarten op een eigen **prikbord** en deel het met collega's en/of leerlingen.
Wat een gemak!

math4all.nl

Math4all

Gratis, maar niet goedkoop.

www.dukohamminga.nl

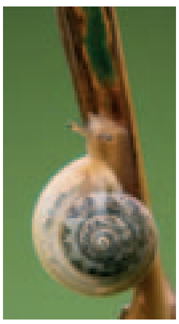
GECIJFERDHEID

Kees Hoogland

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Hij rekent op uw respons.

In de komende jaargang van *Euclides* geeft de redactie mij de ruimte om het begrip gecijferdheid letterlijk en figuurlijk van beelden te voorzien. Voorlopig houd ik maar even de volgende werkdefinitie aan: Gecijferdheid is de combinatie van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten die een individu nodig heeft om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen.[1]

Over alle woorden en concepten in deze definitie kun je heel veel zeggen én laten zien. De kwantitatieve kant van de wereld om ons heen vat ik in ieder geval alvast maar heel ruim op: het gaat om de getallen, patronen en structuren die wij waarnemen en ervaren en onze interactie daarmee. De wereld om ons heen is doordesemd met getallen, patronen en structuren. Daarbij kun je denken aan alles dat wij in die wereld gebouwd en geconstrueerd hebben, maar ook aan de structuren in de natuur, die door de onbedwingbare drang tot groeien, zichtbaar worden. Denk maar eens aan spiraliserende slakkenhuizen en de schubben van de ananas die keurig Fibonacci volgen. Soms wordt dit wel 'the unreasonable effectiveness of mathematics' genoemd. Mijn persoonlijke fascinatie ligt bij wat mensen hiermee doen als actieve gebruiker van rekenen en wiskunde, maar ook wat dit doet met mensen die als consument geconfronteerd worden met allerlei aspecten van die kwantitatieve wereld. Het PIAAC-rapport uit 2013 rept niet voor niets over 1,5 miljoen laaggecijferden in Nederland.





Wat is het belang van gecijferdheid voor het onderwijs? Naast probleemoplossen, modelleren en abstraheren zal ook praktisch gebruik in alledaagse situaties in toenemende mate een van de doelen van reken- en wiskundeonderwijs zijn. Het volgende referentiekader kan zomaar het referentiekader geletterdheid en gecijferdheid gaan heten, net zoals in de rest van de wereld. De pedagogische opdracht ligt bij het woordje 'autonoom' in de definitie waarmee ik deze bladzijde ben begonnen: leerlingen toerusten om nieuwsgierig en vrij van angst en afkeer de kwantitatieve wereld tegemoet te treden. Zo ver maar even.

Voor een aantal thema's in de komende nummers roep ik uw hulp in: ik ben op zoek naar de mooiste (media-) bloopers op het gebied van gebruik van getallen. Dat kan zijn in kranten, op reclamezuilen, in etalages, op aanwijzingsborden: alles mag. Ik geef alvast een krantenkop die op dit gebied als een klassieker wordt beschouwd: 'Bij brand kippenschuur 24.999 kippen omgekomen.'



Volgens de eigenaar waren er 25.000 kippen omgekomen, maar één kip blijkt het op miraculeuze wijze overleefd te hebben. Van die dingen. Graag uw foto's of vindplaatsen naar mij e-mailen voor de kerstvakantie. Ik reken op een grote respons: dat toch zeker wel 2,37% van de lezers hierop reageert.

Ik licht alvast een tipje van de sluier op over de mogelijk onderwerpen in de komende nummers: ongecijferdheid, bloopers in de media, kwantitatieve structuren in lichaam en brein, evolutionaire ontwikkeling, psychologische effecten van gebruik van getallen in redeneringen en discussies, 21ste-eeuwse vaardigheid of ouder dan (geschreven) taal, gecijferdheid in Azië, Afrika en Zuid-Amerika en nog veel meer.

Noot

[1] Zie ook *www.gecijferdheid.nl/werkdefinitie.htm*

Over de auteur

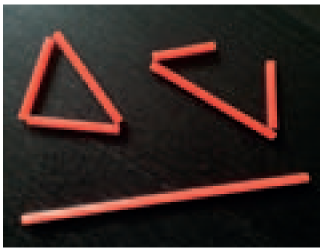
Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid. Hij werkte vele jaren bij APS en vanaf 1 september 2015 bij SLO. Website: *www.gecijferdheid.nl*. E-mailadres: *k.hoogland@xs4all.nl*

STOKJESDRIEHOEK

Fred Muijrers

Door een artikel van Ab van der Roest over kans en meetkunde liet Fred Muijrers zich inspireren; hieronder vindt u zijn bijdrage.

In een vorig nummer van *Euclides* gaf Ab van der Roest een voorbeeld van het combineren van kans en meetkunde.[1] Ik beschrijf een soortgelijk geval, dat eventueel met leerlingen in de klas uitgewerkt kan worden. Dit probleem draait om de driehoeksongelijkheid. In een driehoek geldt



Neem een (glazen) stok. Die valt en breekt in stukken, zie figuur 1. Bepaal de kans dat je met deze stok, gegeven dat die in drie stukken valt, een driehoek zou kunnen vormen.

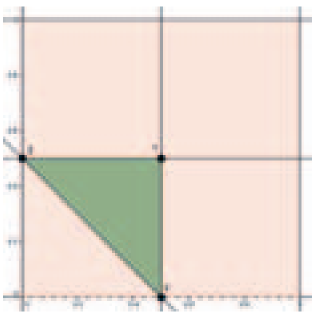
figuur 1 Een simulatie met rietjes

steeds dat de lengte van een zijde altijd minder of gelijk is aan de som van de lengtes van de andere twee zijden. Als een driehoek zijden van lengte a, b en c heeft, dan ontstaan er drie ongelijkheden. Zonder de algemeenheid te schaden mag je veronderstellen dat de stok lengte 1 (meter) heeft. Met a en b ligt dan vervolgens c vast: $c = 1 - a - b$. Er ontstaan dus drie ongelijkheden:

- $a + b \geq 1 - a - b$ ofwel $a + b \geq ½$;
- $a + (1 - a - b) \geq b$ ofwel $b \leq ½$;
- $b + (1 - a - b) \geq a$ ofwel $a \leq ½$.

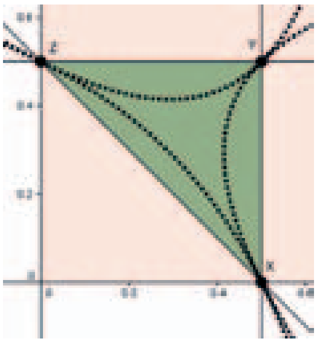
Door de puntenparen (a,b), die aan deze ongelijkheden voldoen, aan te geven in het vierkant [0,1] □ [0,1] ontstaat de groene driehoek XYZ, zie figuur 2. Puntenpaar (0,3;0,25) bijvoorbeeld geeft dan lengtes (a,b,c) = (0,3;0,25;0,45) en daarmee een driehoek, maar puntenpaar (0,1;0,25) geeft dan lengtes (a,b,c) = (0,1;0,25;0,65) maar geen driehoek. De gevraagde kans is af te lezen. Vanaf nu blijven we binnen die driehoek XYZ. Net als in het eerder genoemde artikel kun je goed begrijpen dat de kans op een rechthoekige driehoek 0 is. Puntenparen (a,b) die bij een rechthoekige driehoek horen, voldoen

- of aan $a^2 + b^2 = (1 - a - b)^2$ dat wil zeggen aan $1 - 2a - 2b + 2ab = 0$;
- of aan $a^2 + (1 - a - b)^2 = b^2$ dat wil zeggen aan $1 - 2a - 2b + 2ab + 2a^2 = 0$;
- of aan $b^2 + (1 - a - b)^2 = a^2$ dat wil zeggen aan $1 - 2a - 2b + 2ab + 2b^2 = 0$.

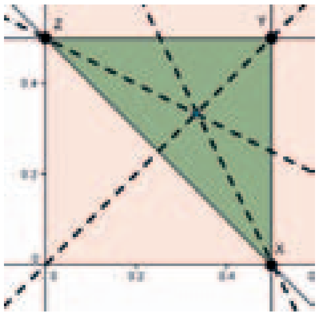


figuur 2

Welke krommen krijgen we in ons plaatje? Na herschrijving wordt de laatste betrekking: $a = -b + 1/(2 - 2b)$. Deze puntenparen liggen dus op een hyperbool met asymptoten met vergelijkingen $b = 1$ en $b = -a$. Analoog voor de andere twee betrekkingen. Ingetekend in de figuur met behulp van *Geogebra* geeft dat de gestippelde grafiek, zie figuur 3. En puntenparen (a,b) die bij een gelijkbenige driehoek horen? Dat geeft de vergelijkingen $b = a$ of $a = 1 - a - b$ dus $2a + b = 1$ et cetera. Zie in figuur 4 de gestreepte grafiek.



figuur 3



figuur 4

Wat is de kans dat een scherphoekige driehoek te maken is? Een puntenpaar (a,b) dat daaraan voldoet kun je weer aflezen: in driehoek XYZ gelegen én binnen de drie stukken hyperbolen. De berekening van de (voorwaardelijke) kans is lastig maar te doen. Nee, dat geeft geen 50% maar minder. De kans op een gelijkzijdige driehoek? Dan (a,b) = (1/3;1/3). Tja, zeer onwaarschijnlijk... En simulatie? Laat 10000 keer of meer, *random* twee getallen p en q uit [0,1] kiezen met $q > p$. Een eenvoudig programmaatje test of met p, $(q - p)$ en $(1 - q)$ een driehoek te maken is en of die scherphoekig is of niet. Nog meer? De stok breekt in vier stukken. Wat is de kans daarmee een convexe vierhoek te kunnen vormen. Dan wordt een 3D-plaatje gevraagd... De combinatie van meetkunde en kansrekening blijft verrassende voorbeelden geven.

Noot

[1] Van der Roest, A. (2015). Kans en Meetkunde. *Euclides*, *90*(5), 32.

Over de auteur

Fred Muijrers is docent en coördinator van de master lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. E-mailadres: *fred.muijrers@han.nl*

HAVO B-EXAMEN

Gerrie Stuurman

Gerrie Stuurman schrijft over het havo wiskunde B-examen. Op het eerste gezicht een prima examen maar in tweede instantie komen er toch wat zaken aan het licht die de moeite van het bespreken waard zijn.

Herkenbaar, niet teveel tekst, geen ingewikkelde contexten, maar wel weinig meetkunde. Dat is de eerste indruk die ik van dit examen kreeg toen ik het voor de eerste keer doorbladerde. Dat was direct na het uitdelen van het examen in de gymzaal. Na afloop bevestigden mijn leerlingen ook dat er veel herkenbare opdrachten in het examen stonden, maar dat betekende niet dat het bij iedereen goed gelukt was. En ja, het waren allemaal opgaven zoals we die ook in de les hadden geoefend. Dat was een goed begin. Naderhand, bij het nakijken en het meekijken op het forum, blijken er toch de nodige haken en ogen aan het examen te zitten.

De leerlingen vonden de eerste context prettig om mee te beginnen. In totaal waren er 10 punten te scoren met de eerste drie opgaven van dit examen. De context was een hangar in de vorm van (een deel van) een bergparabool, zie figuur 1. Eerst moesten de leerlingen laten zien dat de hangar een breedte van 'ongeveer 86,0 meter' had. Dit kon worden aangetoond door het bepalen van de nulpunten van een eenvoudige kwadratische vergelijking. Het correctievoorschrift (cv) eiste dat de leerlingen zowel de positieve als de negatieve oplossing opschreven en dat moest dan ook nog met minimaal twee decimalen. En daar ging het meteen al twee keer fout. Door de term 'ongeveer' dachten veel van mijn leerlingen dat het antwoord '$x = 43$' nauwkeurig genoeg was. En dat je ook alleen de positieve oplossing hoefde op te schrijven en die dan met twee te vermenigvuldigen.
Op het forum waren er opmerkingen over de vraag of een vliegtuig in de lengterichting in de hangar paste, terwijl de beperkende factor daarbij de breedte van het vliegtuig was. In mijn klas is inderdaad een enkele leerling hiermee de fout in gegaan.

De tweede context van het examen behandelde een sinusoïde met een aantal herkenbare onderdelen, zie figuur 2. Er moest worden gedifferentieerd, een raaklijn opgesteld en het functievoorschrift moest worden geschreven in de vorm $y = p\sin(q(x - r)) + s$. In totaal waren er 16 punten te halen voor de drie opgaven. De laatste opgave leverde daarvan 8 punten op. Bij het differentiëren moesten de leerlingen laten zien dat ze de productregel beheersten. Mijn ervaring is dat, ook al oefen je eindeloos veel met de kettingregel en de productregel, een deel van de leerlingen moeite blijft hebben met het herkennen van wanneer welke regel toegepast moet worden. Deze leerlingen maken een soort kettingregel van de productregel: $f(x) = p(x) \cdot q(x) \rightarrow f'(x) = p'(x) \cdot q'(x)$. Jammer!
Na het opstellen van de raaklijn in de tweede opgave moesten de leerlingen een snijpunt bepalen met de grafiek van de sinusoïde. Dat mocht met de rekenmachine. Er was veel te doen over het feit dat in het cv bij de vergelijking die opgelost moest worden een π verkeerd



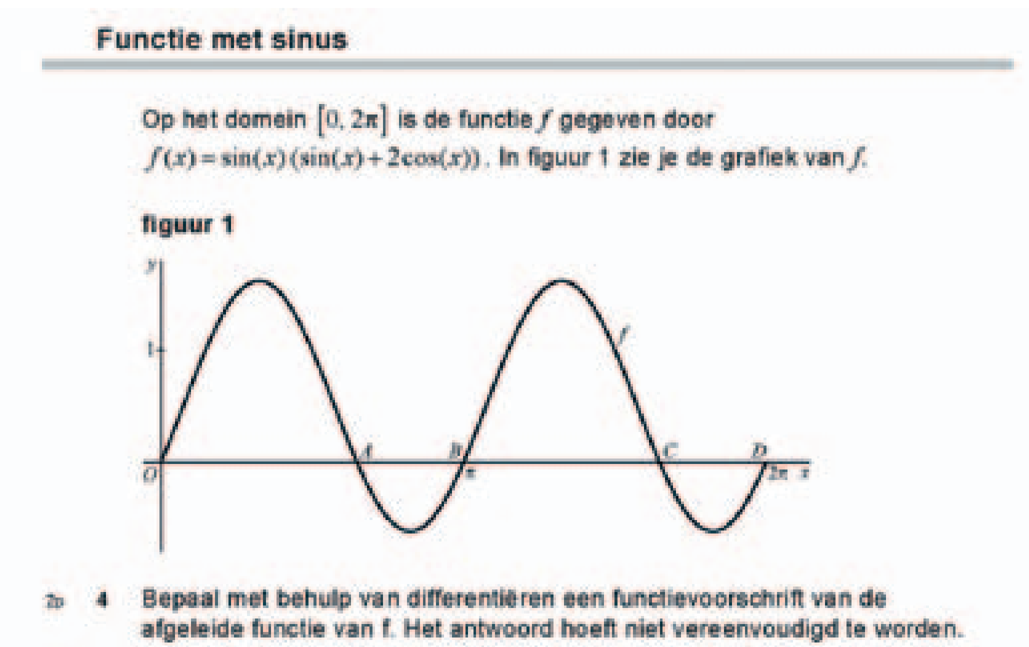
figuur 1 Uit: havo B (Hangar)

was terechtgekomen. Een aanvulling op het cv is er echter niet gekomen. Bij de laatste opgaven van dit onderdeel hebben de makers van het examen gelukkig de letters p, q, r en s gebruikt. In het verleden is er ook wel eens een vergelijkbare opgave geweest, maar dan met de letters a, b, c en d, waarbij de letters op een andere plaats waren gebruikt dan in de door ons gebruikte wiskundemethode gebruikelijk was. Het bepalen van de waarden van p, q, r en s moest in twee decimalen nauwkeurig. Om hieraan te voldoen moesten het maximum en minimum met minimaal drie decimalen berekend worden. De leerlingen die bij opgave 1 van het examen de fout in waren gegaan met het aantal decimalen in de tussenstap, gingen hier wederom de boot in.

Het derde onderdeel *Theedoosje* was de enige meetkundecontext in het hele examen, zie figuur 3. Vorig jaar moesten de leerlingen in het examen een meetkundeopdracht over een theezakje maken. Ik vroeg mij af of we nu volgende jaar een context over een theemuts in de vorm van de wig van Wallis krijgen. Misschien een mooi afscheid van de driedimensionale meetkunde in de havo wiskunde B-examens? In de eerste opgave moesten de leerlingen een redelijk simpel bovenaanzicht van een doosje tekenen. Een van de maten van het grondoppervlak was 41 mm. Dat was lastig te tekenen voor de leerlingen en moeilijk te controleren of dit goed uitgevoerd was. Met een wat dikkere potloodpunt zit je er al snel een (halve) millimeter naast. Volgens mij hadden de examenmakers beter voor 43 mm of iets dergelijks kunnen kiezen. Vervolgens moest er een uitslag worden getekend. Opvallend was dat in het cv de uitslag zodanig was getekend dat een van de grensvlakken (*CDHG*) niet zomaar getekend kon worden zonder eerst de nodige berekeningen te maken. Waar ik in de les leerlingen veel had laten oefenen met afgeknotte kegels en piramiden (want 'dat zit er eigenlijk altijd wel in') hoefden de leerlingen alleen de inhoud van een prisma te berekenen. In ieder geval was deze context bij mijn leerlingen het onderdeel met gemiddeld de hoogste p'-waarde.

In de vierde context moest een gebroken functie worden gedifferentieerd met de kettingregel. Vervolgens moest er (weer) een raaklijn worden opgesteld en exact de x-coördinaat van een punt op de grafiek met dezelfde helling worden gevonden. Voor deze opgave wisten niet veel van mijn leerlingen alle punten te scoren. Toch vind ik dit soort opgaven goed passen in het beleid om meer algebraïsche vaardigheden van leerlingen te vragen.

In de context *Geluidsbox* moesten de leerlingen werken met twee formules en drie variabelen. Een van de twee formules was een log-formule. Ook al stond er duidelijk in de opgave: $L = 10 \cdot \log(...)$, sommige leerlingen zagen dit als een $^{10}\log$. Leerlingen moesten laten zien dat ze met de rekenregels voor logaritmen konden werken. Zowel bij opgave 12 en 14 moest er door 4π gedeeld worden. Een deel van mijn leerlingen ziet 4π als één getal en vergeet dus het gebruik van haakjes bij deze term op de rekenmachine. Blijkbaar iets waar ik komend jaar extra aandacht aan moet geven. Bij opgave 14 was de opmerking in het verslag van de examenbespreking dat de waarden (30W, 80dB en gehoorschade tot een afstand van 155 m) onlogisch zijn. Een van mijn leerlingen zei inderdaad na afloop dat ze uit deze opgave een antwoord had gekregen wat volgens haar 'helemaal niet kon'.


Functie met sinus

Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sin(x)(\sin(x) + 2\cos(x))$. In figuur 1 zie je de grafiek van f.

figuur 1

2p 4 Bepaal met behulp van differentiëren een functievoorschrift van de afgeleide functie van f. Het antwoord hoeft niet vereenvoudigd te worden.

figuur 2 Uit: havo B (Functie met sinus)

Theedoosje

Theezakjes zitten soms per stuk in een doosje verpakt. Zie de foto.

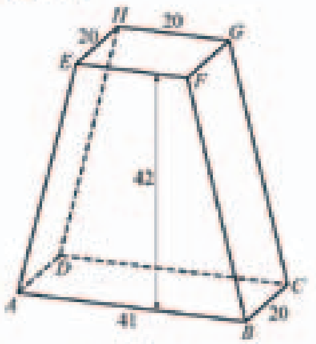
foto



Het theedoosje op de foto heeft de vorm van een prisma. De voor- en achterkant zijn gelijkbenige trapezia en de beide zijkanten zijn rechthoeken.
Het doosje heeft een hoogte van 42 mm, de onderkant is een rechthoek met lengte 41 mm en breedte 20 mm, en de bovenkant is een vierkant met zijden van 20 mm.

In onderstaande figuur zie je een tekening van het theedoosje, met de hoekpunten A, B, C, D, E, F, G en H.
De in de figuur vermelde afmetingen zijn in mm.

figuur



figuur 3 Uit: havo B (Theedoosje)

De laatste twee contexten bestonden uit vijf ‘kale’ opgaven waarbij exact gerekend moest worden, gedifferentieerd en een raaklijn opgesteld. Op het forum stelden collega’s dat er (te) vaak gedifferentieerd moest worden en dat er ook te vaak om raaklijnen gevraagd werd. In ben gaan terugbladeren in de examens van de afgelopen jaren. Het aantal keren differentiëren is wel vergelijkbaar met voorgaande jaren, alleen moesten er dit keer drie keer wat ‘ingewikkeldere’ functies worden gedifferentieerd, terwijl dat in voorgaande jaren ook wel machtsfuncties waren. Drie keer een raaklijn is inderdaad wat veel van het goede.

Bij opgave 17 moest een functie met een zeer herkenbare vorm worden gedifferentieerdf: $f(x) = x\sqrt{2x+3}$.

Wie heeft daar niet flink mee geoefend? Het pijnpunt zit hier in het cv waarbij gesteld wordt dat $x = \sqrt{x^2}$. Dat is tegen het zere ‘wiskunde-been’. Een reactie van het CvTE op de kritiek op deze bewering was, dat voor de goede oplossing alleen een positieve *x*-waarde ingevuld moest worden. Voorgaande jaren is er in het cv van vergelijkbare opgaven (gelukkig) nooit gebruikgemaakt van deze onjuiste bewering. Ik mag hopen en neem ook aan dat we in komende jaren dit niet meer te zien krijgen.
Nog even terugblikkend naar het totaalplaatje van dit examen nadat al het nakijkwerk gedaan is en de tweede correctie afgehandeld is: het was een goed examen met een mooie hoeveelheid algebraïsch werk. De spreiding over de diverse onderwerpen had wat beter gekund. De meetkunde kwam er wel erg bekaaid van af. En misschien was het examen wat aan de lange kant. Maar, zoals een leerling verwoordde in een van de vele examenblogs, het examen was niet te lang als je gewoon wist wat je moest doen.

Over de auteur

Gerrie Stuurman is docente wiskunde op SG Huizermaat te Huizen. E-mailadres: *stuurman@gsf.nl*

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

UITDAGING

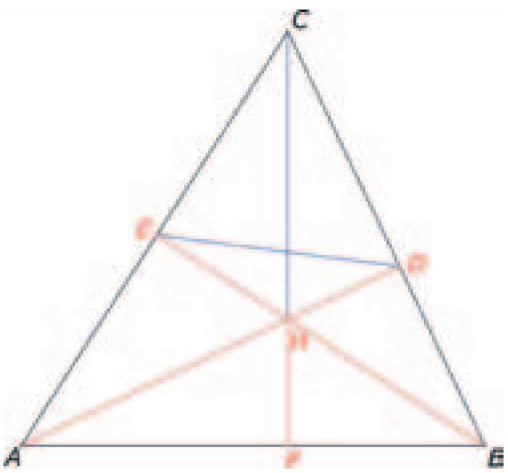
In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer twee opgaven uit 1947 die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1
In de scherphoekige driehoek *ABC* zijn *AD* en *BE* twee hoogtelijnen, die elkaar in *H* snijden. Bereken de hoeken van de driehoek, als gegeven is, dat $CH = 2 \cdot DE$ en $\cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) = ¾$. Lukt het u, exacte uitkomsten te geven?

Opgave 2
Van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 40 = 0$ zijn *A* en *B* de snijpunten met de *x*-as. *P* is een willekeurig punt van de omtrek. Bepaal de vergelijking, de aard en de ligging van de meetkundige plaats van het zwaartepunt van driehoek *ABP*, als *P* de cirkelomtrek doorloopt.

Lukt het u verder?
En een extra vraag achteraf: Hoe heeft de maker van de eerste opgave deze gecomponeerd?



De eerste opgave; een inventarisatie:

1. *DE* is antiparallel met *AB*; de driehoeken *ABC* en *DEC* zijn gelijkvormig. Zou deze gelijkvormigheid ons verder kunnen helpen?
2. De hoogtelijn *CF* gaat door *H*.
3. Descartes' aanpak: stel bijvoorbeeld $DE = 1$ (dus $CH = 2$) en $CF = p$, en betrek de hoeken *A* en *B* in de berekening; maar hoe?

Probeert u het nu even?
Mij lukte het met behulp van een geschikt assenstelsel: kies *AB* als horizontale en *CF* als verticale as. We weten: $F = (0;0)$, $C = (0;p)$, $H = (0;p - 2)$. Bepaal nu de coördinaten van *D* en *E*, en gebruik dat $DE = 1$.
En we kunnen de hellingen van *AC, BC, AD* en *BE* eenvoudig uitdrukken in α en β:
$rico_{AC} = \tan(\alpha)$, $rico_{BC} = -\tan(\beta)$. En loodrecht hierop:

$$rico_{BE} = -\frac{1}{\tan(\alpha)},\ rico_{AD} = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

De vergelijking van *AC*: $y = \tan(\alpha)\cdot x + p$ en *BE*:

$$y = -\frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x + p - 2.$$ Gelijk stellen geeft de coördinaten van *E*:

$$\tan(\alpha) \cdot x + p = -\frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x + p - 2,$$ waaruit volgt:

$$x_E = \frac{-2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} \text{ en } y_E = \frac{-2\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} + p$$

Na enig gonio-formulewerk te vereenvoudigen tot
(1)... $E = (-\sin(2\alpha);\cos(2\alpha) + p - 1)$

Analoog bepalen we de coördinaten van *D*:
De vergelijking van *BC*: $y = -\tan(\beta)\cdot x + p$ en *AD*:

$$y = \frac{1}{\tan(\beta)} \cdot x + p - 2.$$

Gelijk stellen geeft de coördinaten van *D*:

$$-\tan(\beta)\cdot x + p = \frac{1}{\tan(\beta)}\cdot x + p - 2$$, waaruit volgt:

$$x_D = \frac{2\tan(\beta)}{\tan^2(\beta)+1} \text{ en } y_D = \frac{2\tan^2(\beta)}{\tan^2(\beta)+1} + p$$. Na enig gonio-formulewerk te vereenvoudigen tot

(2)... $D = (\sin(2\beta);\cos(2\beta) + p - 1)$

We zijn alvast van die onbekende *p* af!
Met (1) en (2) en $DE^2 = 1$ krijgen we $(\sin(2\alpha) + \sin(2\beta))^2 + (\cos(2\alpha) + \cos(2\beta))^2 = 1$, waaruit volgt $2\sin(2\alpha)\sin(2\beta) - 2\cos(2\alpha)\cos(2\beta) = -1$. Kunt u het afmaken? Probeert u het eens!
U kunt natuurlijk ook verder lezen:
Invullen van het gegeven $\cos(2\alpha)\cos(2\beta) = ¾$ levert op:

$$\sin(2\alpha)\sin(2\beta) = \tfrac{1}{4}, \text{ zodat } \sin(2\beta) = \frac{1}{4\sin(2\alpha)}, \text{ zodat}$$

$$\cos(2\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4\sin(2\alpha)}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\sin^2(2\alpha) - 1}{16\sin^2(2\alpha)}}$$

$$= \sqrt{\frac{16(1-\cos^2(2\alpha)) - 1}{16(1-\cos^2(2\alpha))}} = \sqrt{\frac{15 - 16\cos^2(2\alpha)}{16-16\cos^2(2\alpha)}}$$

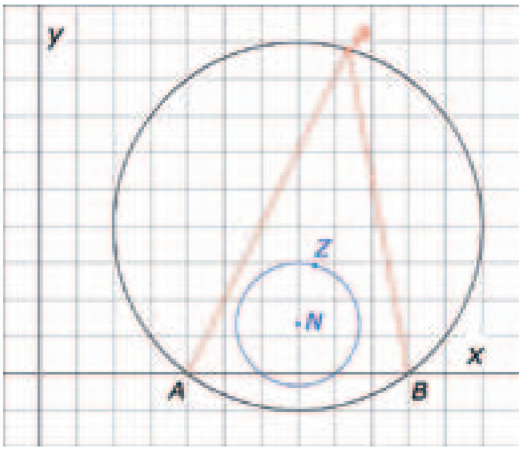
Invullen in de gegeven vergelijking levert uiteindelijk op: $\cos(2\alpha)\cdot\sqrt{\frac{15 - 16\cos^2(2\alpha)}{16-16\cos^2(2\alpha)}} = \frac{3}{4}$, waaruit volgt:

$$\cos(2\alpha) = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Hieruit volgen in principe vier uitkomstcombinaties voor de hoeken van de driehoek: $\alpha = \beta = 15°$, dus $\gamma = 150°$; $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$ dus $\gamma = 90°$; $\alpha = 75°$, $\beta = 15°$ dus $\gamma = 90°$ of $\alpha = 75°$, $\beta = 75°$ dus $\gamma = 30°$.
Aangezien het een scherphoekige driehoek betreft, is alleen de vierde combinatie de juiste.

Hoe deze opgave wellicht bedacht is? Als toetsconstructeur gebruik je vaker de omgekeerde truc: begin met een fraaie driehoek (in dit geval gelijkbenig met tophoek 30°), trek voor de hand liggende lijnstukken en reken de tekening door. Je ontdekt de gegeven verhouding tussen *CH* en *DE*. Doe tenslotte iets aardigs met de hoeken, zoals hier: die dubbele hoeken zijn mooi 150°.

De tweede opgave is natuurlijk niet moeilijk, maar past wel mooi in het nieuwe curriculum VWO.
De cirkelvergelijking kan worden omgeschreven tot $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$, waarbij we het middelpunt *M*(7;4) en straal 5 herkennen. Het is in de klas aardig deze meetkundige plaats te demonstreren met een dynamisch meetkundeprogramma. Met *Geocadabra* maakte ik het volgende plaatje.



De coördinaten van het zwaartepunt van een driehoek zijn het gemiddelde van de coördinaten van de drie hoekpunten. Een leuke opdracht op zich.
$A = (4;0)$, $B = (7;0)$; stel $P = (x_p;y_p)$, dan geldt voor het zwaartepunt $Z = \left(\frac{4 + 10 + x_P}{3};\frac{y_P}{3}\right) = (x_Z;y_Z)$.

Dus $\begin{cases} x_P = 3\cdot x_Z - 14 \\ y_P = 3\cdot y_Z \end{cases}$

Dit invullen in de gegeven cirkel geeft $(3x_Z - 14 - 7)^2 + (3y_Z - 4)^2 = 25$. Delen door 9 geeft $(x_Z - 7)^2 + (y_Z - \frac{4}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2$. Dus ligt *Z* op de cirkel met middelpunt $N(7;\frac{4}{3})$ en straal $\frac{5}{3}$.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

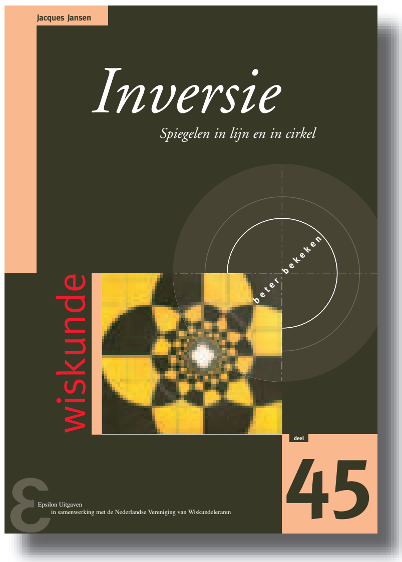


Nieuwe delen Zebra-reeks



deel 44
Labyrinten en doolhoven
Wim Kleijne

deel 45
Inversie
Spiegelen in lijn en in cirkel
Jacques Jansen



Epsilon Uitgaven

prijs per deel € 10
prijs voor NVvW-leden op jaarmarkten € 9
abonnement per vijf delen € 44
www.epsilon-uitgaven.nl

Roland Meijerink

HET CURRICULUM

Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



Een leerling in Nieuw-Zeeland begint aan het voortgezet onderwijs als hij 13 jaar oud is. Hij is leerplichtig tot zijn zestiende. Sommige scholen in Nieuw-Zeeland werken met het internationale Cambridge programma of het *IB*-diploma (*International Baccalaureate*), maar mijn school gebruikt uitsluitend het Nieuw-Zeelandse curriculum.

De onderbouw (jaarlaag 9 en 10) verloopt ongeveer zoals de basisvorming in Nederland volgens mij ooit bedoeld was: alle leerlingen doen in principe hetzelfde curriculum. Op veel scholen wordt er echter wel aan *streaming* of *banding* gedaan, wat betekent dat de leerlingen op basis van testresultaten in klassen worden verdeeld. In de praktijk kom je met de ene klas daardoor wat verder en dieper in het curriculum dan met de andere. Bovendien is er sprake van een afwijkend curriculum voor de allerhoogste (*accelerate*) en allerlaagste (*enhanced learning*) klassen. Het *streamen* is onder docenten, ouders en onderzoekers trouwens niet onomstreden.

In de bovenbouw (jaarlaag 11 tot en met 13) heet het curriculum *NCEA* (*National Certificate of Educational Achievement*). *NCEA* bestaat uit drie niveaus (*levels*), waarvan de leerling er elk jaar één kan afronden. De drie niveaus zijn qua moeilijkheidsgraad ruwweg vergelijkbaar met mavo, havo en vwo. Het is de bedoeling dat een leerling in elk geval zijn *NCEA Level 1* diploma behaalt en daarna doorstroomt naar *Level 2*, een vervolgopleiding of een baan. Om een niveau af te ronden, moet een leerling voldoende studiepunten (*credits*) behalen, voor een deel in taal- en rekenvaardigheid. Bij wiskunde kiezen leerlingen uit twee varianten: wiskunde met *statistics* (vergelijkbaar met wiskunde A) of zonder (wiskunde B). In jaarlaag 13 heet de tweede variant *calculus* en ligt het niveau in de buurt van wiskunde D op het vwo.

De onderwerpen zijn onderverdeeld in *standards* en leerlingen doen per onderwerp een afsluitende toets. Sommige onderwerpen worden in de loop van het jaar door middel van een schoolexamen getoetst, andere aan het eind van het jaar met een centraal examen. Veel onderwerpen komen natuurlijk bekend voor: in de ene klas een toets over rechthoekige driehoeken, in de andere eentje over differentiëren, wat ruimtemeetkunde of kansrekening hier, een flinke hap algebra daar. Echt nieuw voor mij waren bijvoorbeeld de stukken over statistische inferentie, waarbij leerlingen een kort rapport moeten schrijven. Ze stellen op basis van een dataset een onderzoeksvraag op, bijvoorbeeld: ‘Ik vraag me af of jongens op Karamu High School in de brugklas gemiddeld meer geld uitgeven aan hun telefoon dan meisjes’. Dan bepalen ze met behulp van een computerprogramma (*iNZight*) een aselecte steekproef.[1] Ze genereren een boxplot en moeten aan de hand van een analyse van bijvoorbeeld medianen en kwartielen een onderbouwde conclusie trekken. Op de hogere niveaus komen dan zaken als steekproefvariantie en betrouwbaarheidsintervallen om de hoek kijken. Behoorlijk lastig, zeker omdat het talig is – niet in de laatste plaats, in mijn geval, voor de docent. De manier van toetsen en beoordelen verloopt trouwens heel anders dan in Nederland; daarover vertel ik de volgende keer wat!

Meer lezen? Ik houd een blog bij op *www.tegenvoeters.nl* en reacties zijn van harte welkom op *rmeijerink@karamu.school.nz*

[1] Zie *www.stat.auckland.ac.nz/~wild/iNZight/index.php*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

GEZEUR!

Ab van der Roest activeert de voorkennis van zijn leerlingen. En al doorvragend krijgt hij een inzicht over de grondhouding van de docent.

Regelmatig krijg ik van mijn klas te horen dat ik veel te moeilijk doe. In dit stukje wil ik u meenemen naar zo'n les waarin de klacht weer geuit werd. Het is in een 4 havo-klas en ik geef er wiskunde B.
In een hoofdstuk waarin we stelsels gaan oplossen, begin ik met terug te halen wat de leerlingen al weten of zouden moeten weten. En gelukkig weten ze wel wat. Nadat ik op het bord geschreven had: $y = 2x - 3$ en ik vroeg 'waar denk je aan als je dit ziet', reageerde een leerling met 'een vergelijking' en een ander met 'een lijn' en weer een ander met 'aan beide kanten hetzelfde doen'. Mooi dat weten ze dus. Ik maakte van de vergelijking een tabelletje, zette een paar waardes voor x erin en ze rekenden de bijbehorende waardes van y uit en tekenden de lijn.

x	0	1	2
y	−3	−1	1

Een tweede lijn: $y = -x + 2$ werd op dezelfde manier getekend.

Op mijn vraag 'hoe bepaal ik het snijpunt?' kreeg ik een snelle en goede reactie: $2x - 3 = -x + 2$. 'Dat is goed', maar waarom? En dan ontstaat de ergernis. Leerlingen weten niet eenvoudig onder woorden te brengen waarom ze deze vergelijking moeten oplossen. Na lang doorzeuren, volgens leerlingen, komt er 'de x moet hetzelfde zijn'. Dat is wel waar, maar dat is niet de reden en zo ontstaat er een patstelling die doorbroken moet worden.
Na doorvragen komen we niet verder en moet ik helpen. De klas weet wel te vertellen dat in het snijpunt de x en de y hetzelfde zijn, want zo ligt het punt op beide lijnen. En dan valt het kwartje bij een van de leerlingen: het gaat er dus niet om dat de x gelijk is, maar dat de y gelijk is. Snijpunt wordt bepaald en we gaan naar het rekenen met stelsels. Mijn eerste opgave is:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

We bespreken dat de eerste vergelijking als grafiek ook een lijn is, en dat het oplossen van het stelsel hetzelfde is als het snijpunt van de lijnen vinden. Welke aanpak? Al snel krijg ik het advies om de eerste vergelijking te herschrijven in de vorm van $y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ en dan weer gelijk stellen. Kan het anders? 'Ja, want anders vraagt u er niet naar' is het antwoord. Hoe? Dit is weer een denkstap te ver. Ik haal het laatste stapje van de eerste opgave weer naar voren; we vonden $x = 1\frac{2}{3}$ en hoe berekenden we de bijbehorende y? Het helpt niet echt, maar het is ook al bijna 15.30 uur. Ik zeg 'Ik weet y, kijk maar $y = x + 1$.' Wat doen we dan? In de eerste vergelijking y vervangen door $x + 1$!
De opgave is klaar en de oplossing is gevonden, maar de beloning voor mij komt er als een leerling zegt: 'Eigenlijk zeg je ook hier dat de y in beide vergelijkingen hetzelfde is!' De grondhouding van de leraar moet misschien wel een beetje zeurderig zijn, gaat er door mijn hoofd...

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

Lonneke Boels

PROXIMITY

Deze keer bezocht Lonneke Boels een website met allerlei wiskundespelletjes. De verschillende spellen zijn bedoeld om het wiskundig inzicht van leerlingen te ontwikkelen. Ze bespreekt hier het spel dat haar het meest aansprak.



figuur 1 Website met diverse spellen

Een van mijn favoriete spellen van deze website, *http://play.ccssgames.com*, is het spel *Proximity*. Het spel heeft als wiskundig doel om het inzicht in lineariteit, meer specifiek evenredigheid, te ontwikkelen. Ondertussen wordt ook handig gebruikgemaakt van statistische data, een reden waarom het ook wel een 'data-game' wordt genoemd door de ontwikkelaars. Met dit spel kunnen leerlingen ontdekken dat wiskunde een rol speelt in de echte wereld, in dit geval de wereld van de games. Bovendien laat het spel mooi zien dat wiskunde veel meer is dan alleen maar procedures oefenen, zoals de procedure voor het opstellen van een lineaire formule. Zeker met een grote hoeveelheid filmpjes op *YouTube* met uitleg over hoe je wiskundige 'recepten' (algoritmen) uitvoert, lijkt wiskunde soms te verworden tot het leren van een receptenboek. Dat is saai en beslist niet de praktijk van een wiskundige. In de echte wereld is vaak de belangrijkste en moeilijkste vraag, de vraag welke wiskunde nodig is. Wat overigens niet betekent dat het leren van procedures en het oefenen van algebraïsche vaardigheden geen nut heeft, integendeel. Er is alleen zo ontzettend veel meer leuks te beleven aan wiskunde.

Het spel *Proximity* dus. Het lijkt een beetje op biljarten. Je stoot met een kleine bal (wit puntje) naar de grote wit-groene cirkel op het scherm. Voordat je dit doet, meet je eerst de afstand met de liniaal (*ruler*) door deze aan te klikken en dan op het witte puntje te klikken en naar het midden van de cirkel met nummer 1 de afstand te meten. In mijn geval was deze afstand de eerste keer ongeveer 200. Vervolgens ga je met je muis op het witte puntje staan en trekt dit naar achteren (muis ingedrukt houden). Ik koos voor een kracht van '20'. Daarmee scoorde ik bijna het maximum van 100 punten. Des te beter de stootkracht overeenkomt met de afstand (via een evenredigheidsfactor) des te hoger de punten. De stootkracht blijkt in het eerste spel de afstand gedeeld door tien te zijn. Elke stootkracht (*push*) wordt uitgezet tegen de afstand die is afgelegd in een assenstelsel. De punten liggen mooi op één lijn, behalve die ene stoot die via de band ging (omdat het rechtstreeks niet lukte). Daardoor heb ik de score van minimaal 500 niet gehaald en mocht ik niet door naar het volgende niveau.
In de volgende niveaus wordt het spel steeds lastiger. Eerst verandert de helling van de grafiek per zes spellen. Na de eerste stoot is via schatten de helling te berekenen, maar je kunt ook het programma een lijn laten tekenen en deze verschuiven of draaien zodat hij door de punten loopt die uit de stoten volgen. De formule krijg je er dan gratis bij. Nadat je de lijn hebt laten trekken, kun je in het instellingenscherm de lijn door de oorsprong laten gaan. Om te voorkomen dat leerlingen een niveau per ongeluk halen, moet je een aantal niveaus tweemaal halen. Dat lukt alleen als je de wiskunde achter het spel begrijpt en gebruikt. Vervolgens komt er vanaf het niveau *Dopey* extra variabiliteit in het spel, in dit geval in de vorm van 'ruis'. De helling is dan niet steeds hetzelfde.

Pluspunten

- het is een echt spel;
- het is echte wiskunde;
- leerlingen kunnen vrij gemakkelijk de relatie tussen stootkracht en afgelegde afstand ontdekken;
- het gebruik van wiskunde maakt dat je sneller naar een hoger niveau gaat. De hoogste niveaus zijn zonder wiskunde niet te bereiken;
- het sluit aan bij het nieuwe examenprogramma



figuur 2 De tweede stoot

waarbij data verzamelen en interpreteren een belangrijke rol speelt;
- het is leuk en uitdagend om te doen;
- het kan in de klas worden getoond met beamer of digitaal schoolbord. In het computerlokaal is het natuurlijk nog leuker;
- het kan worden gebruikt om lineaire formules te leren, of te herhalen. Of het nut van het verzamelen en interpreteren van data te ontdekken. De vraag is vervolgens bij welke spellen het verzamelen van data nog meer mogelijk en nuttig is;
- door de introductie van ‘ruis’ vanaf het niveau *Dopey* krijg je te maken met spreiding rondom een rechte lijn. Hier liggen allerlei mogelijkheden voor discussies over statistiek;



figuur 3 Scores van drie games

- door gebruik van tabel, grafiek en formule wordt de relatie tussen deze drie verstevigd;
- achtergrondinformatie over het spel, het ontwerp en de achterliggende (didactische) gedachten zijn te vinden op de website van de maker;
- na registratie is extra uitleg voor docenten beschikbaar.

Minpunten

- het is niet beschikbaar als *offline app* op de telefoon en daardoor zullen leerlingen het minder snel in hun vrije tijd gaan spelen. Het spel werkt op zich wel op veel telefoons, maar vanwege de ruimte die nodig is voor de grafiek, tabel en het spel is dit onhandig;
- het is niet gemakkelijk om in één keer alle data van oudere spelen te verwijderen maar van de meest recente te behouden. Hierdoor wordt de grafiek wat onoverzichtelijk na het spelen van een flink aantal spellen. Tip: verwijder na elke niveauverhoging alle data van de vorige niveaus. Deze zijn onbruikbaar geworden;
- het afronden van een spel duurt langer dan een lesuur.

Eindoordeel: aanschaffen

Geschikt voor: brugklas en tweede klas vmbo, havo en vwo. Leuk als herhalingsles voor 3 havo, 4 havo wiskunde A, 3 vwo en 4 vwo wiskunde A en C.
Kosten: gratis
Getest op: laptop met windows 8 en browser Google Chrome
Meer informatie: *http://escholarship.org/uc/item/31t469kg#page-3* en *http://play.ccssgames.com*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo’s. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2015

DERDE UITNODIGING

Kees Garst

Dit is de derde uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2015 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 7 november 2015**.
Aanvang – 10:00 uur
Sluiting – 16:00 uur
Plaats – **Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal**

Agenda

10:00 – 11:00 uur – **Jaarvergadering**

1. Opening door de voorzitter, dhr. S. Garst
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2014 (zie het volgende nummer van *Euclides*)
4. Jaarverslagen 2014/2015 NVvW en *Euclides* (zie het volgende nummer van *Euclides*)
5. Jaarrekening en balans 2014/2015, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, begroting 2015/2016, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing. De bestuursleden Henk Rozenhart, Henk van der Kooij, Ab van der Roest en Christiaan Boudri treden af en stellen zich niet herkiesbaar. Gert de Kleuver en Lidy Wesker-Elzinga zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar. In een Nieuwsbrief aan alle leden die in september verschijnt, zal het bestuur nieuwe bestuurskandidaten voorstellen. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vraag vóór aanvang van de vergadering in te dienen bij de secretaris (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*)
8. Sluiting van de Jaarvergadering

Programma Studiedag

11:00 – 11:15	Inleiding op de studiedag
11:15 – 12:00	Plenaire lezing
12:00 – 12:15	Koffie/thee
12:15 – 13:15	Workshopronde 1
13:15 – 14:00	Lunchpauze, marktbezoek
14:00 – 15:00	Workshopronde 2
15:00 – 15:15	Koffie/thee
15:15 – 16:00	Plenaire voordracht
16:00 – 16:10	Afsluiting.

Themagedeelte van de studiedag

Voor de verandering...

Voor of tegen verandering in wiskundeonderwijs maakt, in ieder geval voor onder- en bovenbouwdocenten havo/vwo, nu niet echt meer uit. In november bent u in de vierde klas ook druk bezig de nieuwe examenprogramma's te onderwijzen. Bent u gelukkig met de wiskundemethode die u en uw leerlingen moet ondersteunen om naar een vernieuwd examen toe te werken? Lijkt het u leuk om samen met collega's daarover te praten in november? Wilt u graag informatie van docenten die al langer bezig zijn met de implementatie van de nieuwe programma's? Dat kan uiteraard.
Maar er is meer waar u aan kunt denken bij 'Voor de verandering'. Gewoon eens iets anders doen met een les (of meer) om uw leerlingen echt mee te krijgen in diverse aspecten van wiskunde. Bent u, voor de verandering, wel eens bezig met

- een leuke les(senserie) opzetten en doorwerken met uw leerlingen die het sommetjes-maken-uit-het-boek ontstijgt?

- eens buiten de deur gaan kijken met uw leerlingen (denk aan wiskundewandeling, Nemo, Boerhaave, ...)?
- een inspirerende persoon uit het bedrijfsleven in de les uitnodigen om uw leerlingen te laten ervaren dat wiskunde in veel beroepen echt nodig en nuttig is?
- meedoen aan een van de vele wiskunde-uitdagingen die er zijn: Wiskunde Onderbouwdag, Wiskunde B-dag, Wiskunde A-lympiade, Wiskunde Olympiade, Nijmeegse wiskundewedstrijd, Kangoeroe, ...?
- denken en praten over nieuwe, beter passende wiskundeprogramma's voor vmbo. Vmbo lijkt een 'stiefkindje' bij OCW en andere instanties. Schande, toch? Er wordt, ook vanuit het bestuur van de NVvW, nagedacht over vernieuwde programma's voor vmbo wiskunde. Wilt u meedenken daarover? Welkom!
- samenwerken met docenten van andere vakken: hoe gebruiken collega's van andere vakken technieken en concepten van de wiskunde? Kan dat beter worden afgestemd? Hoe organiseren collega's dat?
- denken over zelf een workshop verzorgen op de studiedag omdat u een leuk idee hebt voor inspirerende lessen wiskunde, in plaats van alleen maar een workshop te volgen?

Op dit moment zijn we bezig een gevarieerd en interessant programma voor u samen te stellen. De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorige jaren, op de site van de NVvW gepresenteerd. De eindverantwoordelijken voor het themagedeelte zijn Henk van der Kooij en Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadressen: *h.vanderkooij@uu.nl*; *L.J.B.Elzinga@uva.nl*).

De LIO-dag
Al enige jaren is de LIO-dag een succesvolle traditie: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de lio'ers. Het ochtendgedeelte gaat over hun afstudeerscriptie, met pas afgestudeerden als sprekers, en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte.

Nieuwe leden
De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een hapje en een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten
De studiedag is gratis voor leden.
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 80,00; (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 september 2016, inclusief alle faciliteiten, waaronder de zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00. Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00. *Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!*

Aanmelding
Aanmelding dient tijdig te geschieden **vóór 19 oktober 2015**. Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de nieuwe site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar u een keuze uit kunt maken. Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen en geeft ook aan hoe u kunt betalen.

Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 80,00	€ 90,00
Student (niet-lid)	€ 40,00	€ 50,00

Plaatsing voor de workshop gaat op volgorde van binnenkomst, vol = vol. Zoals vorig jaar wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar u uw hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Ruud Jongeling (e-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*).

Certificaat

De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken, die u kunt gebruiken voor *www.registerleraar.nl*. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum. U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45 uur) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

Informatie

Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*). Met vragen kunt u altijd terecht bij de ledenadministratie: Heleen van der Ree (tel.: 0180 32 10 97, e-mailadres: *ledenadministratie@nvvw.nl*).

WISKUNDEWANDELING

IN GRAND HOTEL GOOILAND

Joke Daemen
Peter Kop
Ger Limpens
Marcel Voorhoeve

Ter gelegenheid van de negentigste verjaardag van de NVvW hebben de auteurs van dit artikel een wiskundewandeling gemaakt, die tijdens het feest door de aanwezigen uitgevoerd is. Dit artikel is een samenvatting van het volledige verslag dat op onze website te vinden is.



figuur 1 Vraag 3

Toen in het voorjaar van 2014 de locatie voor het jubileumfeest bekend was, ontstond het idee om een wiskundewandeling in het gebouw te houden. De locatie werd enkele keren bezocht en met een onderzoekende blik hebben we samen in een eerste brainstorm vragen bedacht waar ook wij geen antwoord op hadden. Het gebouw werd een tweede keer aan een nauwkeurige inspectie onderworpen en we lichtten de doopceel van architect Jan Duiker, met gebruik van internet en de annalen van het hotel. Een en ander leverde voldoende informatie op om de wandeling te ontwerpen. Ad van den Broek heeft vervolgens de vormgeving verzorgd, een ontwerp zoals we dit ook kennen van de wiskundewandeling in Nijmegen van Leon van den Broek, zijn broer. In dit artikel passeert een drietal vragen en antwoorden de revue alsmede enkele opvallende inzendingen. Zoals al bij het jubileum vermeld, kan over de uitslag niet gecorrespondeerd worden. Ook nu niet...

Vraag 3 – vergde, behalve wiskundig inzicht, ook elementair tellen en voldoende rust en concentratie, zie figuur 1. De trap telde vijftien treden (dat wil zeggen vijftien 'niveauverhogingen'). Ook de laatste niveauverhoging waarbij de entresol betreden wordt, dient meegeteld te worden maar dat had niet iedereen door. Vervolgens kun je verder op meerdere manieren. We bespreken twee mogelijke aanpakken. Als eerste de mogelijkheid met gebruik van de Fibonaccireeks. Je moet dan inzien dat het aantal manieren om een trap met n treden te beklimmen: $A(n)$ kan worden afgeleid uit het aantal manieren voor een trap met n–1 en n–2 treden. Er geldt: $A(n) = A(n–1) + A(n–2)$ met

$A(1) = 1$ en $A(2) = 2$. Een tweede mogelijkheid is het sommeren van de binomiaalgetallen

$$\left(\binom{15}{0}+\binom{14}{1}+\binom{13}{2}+\binom{12}{3}+\binom{11}{4}+\binom{10}{5}+\binom{9}{6}+\binom{8}{7}\right).$$

Uiteraard leveren beide methoden het exacte antwoord: 987. Het juiste antwoord werd weliswaar door veel mensen gekozen, maar er waren maar weinig inzendingen die ook daadwerkelijk die 987 correct bepaald hadden. Kennelijk zijn er collega's die een goed gevoel hiervoor hebben (of werd hier de rekenmachine toch wel node gemist...).

Vraag 8 – moet een fraai beeld hebben opgeleverd (zie figuur 2): het vermoeden bestaat dat veel deelnemers het antwoord op empirische wijze bepaald hebben en dus languit op het tapijt in het midden van zaal 2 zijn gaan liggen en zich vervolgens naar een zijkant hebben gewenteld. Het wachten is op YouTube-filmpjes van andere feestgangers; we houden ons aanbevolen. Antwoord op de vraag (waar gelukkig geen toelichting gevraagd werd) is antwoord a) *heel licht nauwelijks zichtbaar gebogen op de foto te zien zijn*. Slechts twee van de groepjes kozen voor deze optie, dus de vraag is gerechtvaardigd wat men dan in meerderheid al liggend denkt te hebben waargenomen...

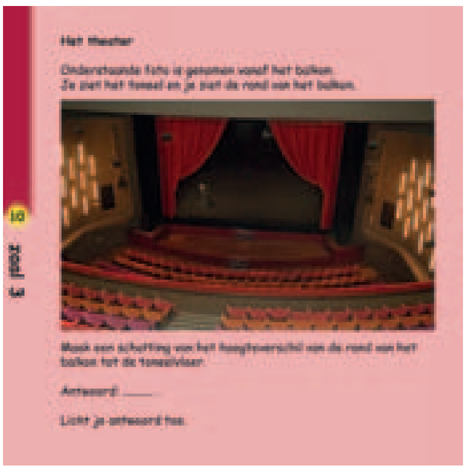
Vraag 10 – betrof het maken van een schatting van het hoogteverschil tussen balkon en toneelvloer, zie figuur 3. Op grond van onze eigen metingen hadden we besloten het juiste antwoord 4,10 meter, van een marge van 20 cm te voorzien. Een groepje slaagde erin een antwoord te geven dat binnen de tolerantiegrenzen viel. De toelichting 5/3 x 5/2 met 'zoveel × een deur' als opmerking bij 5/3 en 'deur' bij 5/2 liep niet over van duidelijkheid; we vermoeden dat de inzenders de hoogte van een – welke? – deur geschat hebben en die vervolgens virtueel afgepast hebben op de gevraagde hoogte. De andere antwoorden liepen nogal fors uiteen: we scoorden antwoorden van 2 meter tot 17 meter.

Wij hebben als samenstellers van deze wiskundewandeling niet de illusie dat we hier de ultieme wiskundewandeling gecreëerd hebben. Na afloop van de beoordeling van de verschillende inzendingen constateerden we dat een enkele aanscherping deze of gene vraag beter uit had doen komen. We hopen vooral dat deze verzameling vragen als inspiratiebron kan dienen om te laten zien dat er in nagenoeg iedere omgeving wel een aanleiding gevonden kan worden om daar met een wiskundig georiënteerde bril naar te kijken. En dat er zo nieuwe mogelijkheden aangeboord worden om in ons onderwijs de leerlingen te blijven fascineren met uitdagende problemen.

vakbladeuclides.nl/911daemen



figuur 2 Vraag 8



figuur 3 Vraag 10

Over de auteurs

Joke Daemen is lerarenopleider wiskunde bij de Universiteit Utrecht. Peter Kop is docent wiskunde en lerarenopleider bij de Universiteit Leiden. Ger Limpens is toetsdeskundige bij Cito. Marcel Voorhoeve is docent aan de Hogeschool van Amsterdam en aansluitingscoordinator aan de Universiteit Leiden. E-mailadressen: *J.W.M.J.Daemen@uu.nl*; *KopPMGM@iclon.leidenuniv.nl*; *ger.limpens@gmail.com*; *marcel.voorhoeve@gmail.com*

PUZZEL 91-1

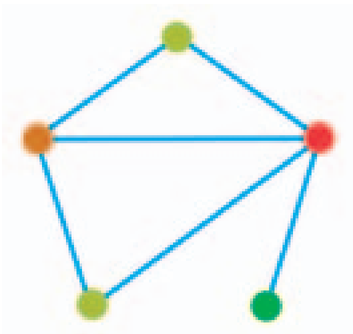
GRADEN EN KNOPEN VAN EEN GRAAF

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel is weer gebaseerd op een idee van F. Göbel, die enkelvoudige reguliere, irreguliere en bijna irreguliere grafen onderzocht.
Enkelvoudig: Tussen twee knopen zit hoogstens één lijn, en er zijn geen lussen die een knoop met zichzelf verbinden. Wel zijn cykels mogelijk.
Regulier: De graad van elke knoop is gelijk, dat wil zeggen dat bij elke knoop evenveel lijnen samen komen. Als tegenhanger van regulier definieerde hij een *volkomen irreguliere* graaf als een graaf waarin de graad van elke knoop verschillend is. En een *bijna irreguliere* graaf is dan een graaf waarin alle graden verschillend zijn op één na. Er zijn dan precies twee graden aan elkaar gelijk. De graadrij (= opsomming van klein naar groot van alle graden die in de graaf voorkomen) is dan bijvoorbeeld 1, 2, 2, 3, 4, zie figuur 1.
Merk op dat bovengenoemde definities niet per se inhouden dat de grafen samenhangend zijn, dus ze kunnen eventueel uit twee of meer los van elkaar liggende delen bestaan.

Opgave 1 – Toon aan dat volkomen irreguliere enkelvoudige grafen niet bestaan. Het bewijs maakt slechts gebruik van basale eigenschappen van de mogelijke graden in een enkelvoudige graaf.

Opgave 2 – Bepaal alle enkelvoudige bijna irreguliere grafen met zeven knopen. Misschien helpt het u om eerst oplossingen te vinden voor kleinere grafen om te ontdekken dat er een betrekkelijk eenvoudig algoritme bestaat waaruit blijkt hoe die grafen er voor n knopen uit moeten zien.



figuur 1 Bijna irreguliere graaf met vijf knopen

Opgave 3 – In deze opgave bekijken we grafen van n knopen die niet enkelvoudig zijn, dus er mogen meerdere lijnen liggen tussen verschillende knopen. Ook hier zijn cykels toegestaan, maar we beperken ons daarbij tot samenhangende grafen zonder lussen, waarvan de graadrij een rij opvolgende getallen is. Die hoeven niet per se bij 1 te beginnen. Dan zijn volkomen irreguliere grafen wel mogelijk. Voor bijvoorbeeld $n = 7$ zijn er een heleboel, maar voor sommige andere waarden van n bestaan ze helemaal niet.

a. Voor welke waarden van n bestaan zulke grafen wel of niet? Een algemeen antwoord met bewijs levert u de meeste punten voor de ladder, maar beperk u anders tot een voorbeeld voor die waarden van n waar dat kan voor $n \leq 10$.
b. Bepaal voor $n = 7$, drie zulke grafen: een met een of meerdere cykels; een tweede zonder cykels of zijtakken, dus lineair en een derde zonder cykels, maar met zijtakken.

N.B. Voor de programmeurs is het nog wel te doen om te bepalen hoeveel mogelijkheden er zijn zonder cykels of zijtakken, maar met zijtakken en/of cykels wordt dat heel ingewikkeld. Maar wie weet lukt dat u toch?
U kunt uw grafen tekenen, maar een verbindingsmatrix is ook prima.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 12 oktober 2015 binnen zijn.

UITWERKING PUZZEL 90-6

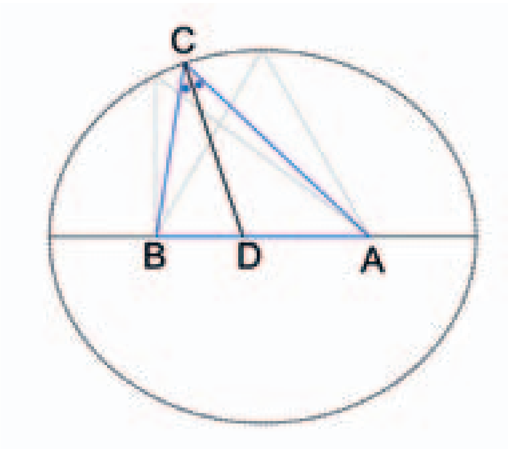
BIJZONDERE ISO-AFSTANDSLIJNEN

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

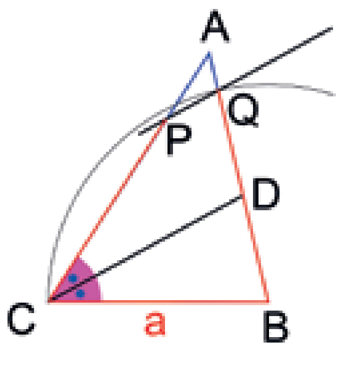
De totale afstandssom van een punt P tot de zijden van een driehoek noteren we als $d(P)$. Gevraagd werd naar een constructie van een driehoek ABC, waarin een van de bijzondere lijnen in de driehoek tevens iso-afstandslijn is, en een verband tussen de zijden $a = BC$, $b = AC$ en $c = AB$. Er waren dan naar eigen keuze twee elementen (hoek + lijnstuk of twee lijnstukken) gegeven. Merk op dat gelijkzijdige driehoeken hier altijd aan voldoen. Daar is immers de afstandssom overal in het vlak gelijk. Voor het oplossen van de opgaven zijn er steeds meerdere manieren, maar we beperken ons tot één voorbeeld. De puzzel biedt verschillende mogelijkheden voor meetkunde opgaven in uw les, ook voor de onderbouw en wellicht in combinatie met wat algebra.

Bij **opgaven 1 en 2** ging het om een bissectrice. In opgave 1 was driehoek ABC de bekende rechthoekige 3-4-5 driehoek en bij opgave 2 een 'willekeurige' driehoek. Een fraaie oplossing van opgave 1 kwam van L. Pos, waarbij geen bissectricestelling nodig was. Hij gebruikte de ingeschreven cirkel met middelpunt M en straal r. Voor de totale afstandssom geldt dan: $d(M) = 3r$. Omdat M op alle drie de bissectrices ligt, moet $d(M)$ gelijk zijn aan de totale afstandssom van één van de hoekpunten. Bijvoorbeeld $d(C) = h$, met h = lengte hoogtelijn uit C. Door het oppervlak van driehoek ABC op twee manieren te berekenen, vinden we: $½·c·h = ½·r·(a + b + c)$. Met $d(C) = d(M)$ dus $h = 3r$ levert dat: $c·3r = r·(a + b + c)$, dus $3c = a + b + c$ of $2c = a + b$. Hiermee hebben we meteen de relatie tussen a, b en c voor het antwoord bij opgave 2b: c is het rekenkundig gemiddelde van a en b.
Dit eenvoudige verband bepaalt dus dat de bissectrice CD iso-afstandslijn is van driehoek ABC. Hiermee kan de constructie heel eenvoudig. En ook opgave 1: $c = ½·(3 + 5) = 4$, dus met $c = 4$ is de bissectrice uit C tevens iso-afstandslijn. Tevens zien we dat algemeen geldt: als A en B bekend zijn, dan ligt C op een ellips met A en B als brandpunten en $AC + BC$ = constant = $2·AB$., zie figuur 1.

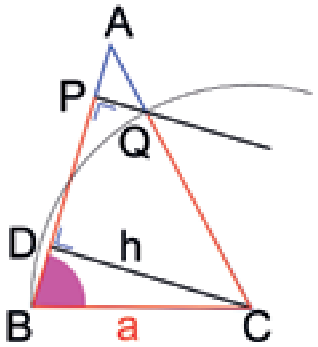
We geven ook nog een constructie voor opgave 2a zonder eerst de relatie tussen a, b en c te bepalen. Bij de uitwerking van puzzel 90-4 toonden we al aan dat in driehoek ABC, met P op AC en Q op AB, en $CP = BQ = a$ geldt: PQ en alle lijnen evenwijdig aan PQ, zijn iso-afstandslijnen. Op basis daarvan construeren we een driehoek waarvan hoek C en de aanliggende zijde BC gegeven zijn en waarvan de bijzondere lijn CD, de bissectrice uit C, iso-afstandslijn is.
Teken de hoek en de aanliggende zijde, hier hoek C en zijde $BC = a$. Hiermee ligt de richting van de bissectrice uit C vast. Teken nu P op het andere been van hoek C, met $CP = a$. Trek vervolgens een lijn door P evenwijdig aan de beoogde bijzondere lijn. Q ligt op die lijn, met $BQ = a$, dus die kunnen we ook tekenen, en ook de lijn BQ. Door de verlengden van CP en van BQ te snijden vinden we dan hoekpunt A, waarmee de driehoek compleet is, zie figuur 2.



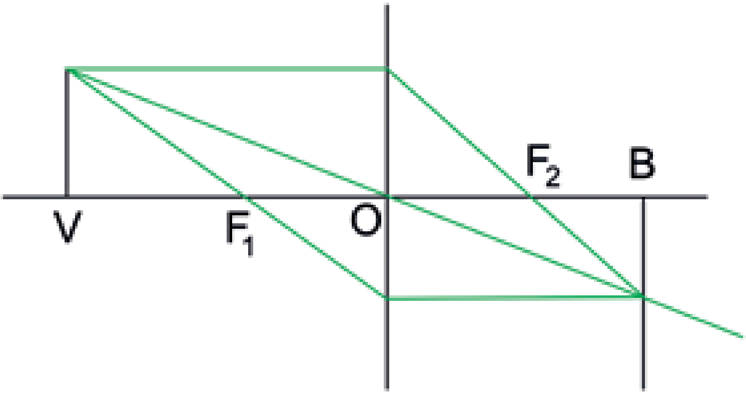
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Opgave 3 – Hier moest *CD* = hoogtelijn uit *C* tevens iso-afstandslijn zijn. Als we kiezen voor gegeven hoek *B* en *BC* = *a*, gaat de constructie op vergelijkbare manier als bij opgave 2. De richting van *CD* en dus van *PQ* is weer bekend en nu wordt *BP* = *CQ* = *a*, zie figuur 3. De relatie was hier optioneel, maar, met hoogtelijn *CD* en *E* en *F* de voetpunten van de loodlijnen uit *D* op *AC* en *BC*, moet gelden: *DE* + *DF* = *CD* = *h*, of $\frac{DE}{h} + \frac{DF}{h} = 1$. En $\frac{DE}{h} = \frac{AD}{AC} = \cos(A)$ en ook $\frac{DF}{CD} = \cos(B)$. Gevolg: cos(*A*) + cos(*B*) = 1, zoals beschreven door J. Guichelaar en H. Bakker.
Met behulp van de cosinusregel volgt dan bijvoorbeeld: $\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} = 1.$

Opgave 4 – Nu moet de zwaartelijn *CD* uit *C* iso-afstandslijn zijn. Dan geldt: *AD* = *BD* = ½·*c*. Hier bepaalde iedereen eerst het verband tussen *a*, *b* en *c*. Met twee zijden gegeven kunnen we dan de derde construeren en dus ook driehoek *ABC*. Enkele inzenders bepaalden met *PQ* evenwijdig aan *CD*: $\frac{AD}{b} = \frac{(c-a)}{(b-a)}$. Dat geldt dan voor alle gevallen waar *CD* iso-afstandslijn is. Met *AD* = ½·*c* geeft dat: $\frac{1}{2}c = \frac{b(c-a)}{(b-a)}$. Dit is te herleiden tot $c = \frac{2ab}{(a+b)}$ of

(I)... $\frac{c}{2b} = \frac{a}{a+b}$ of

(II)... $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Met (I) kunnen we met gelijkvormigheid *c* construeren als *a* en *b* gegeven. Maar in (II) herkennen we de formule voor het harmonisch gemiddelde: *c* is het harmonisch gemiddelde van *a* en *b*.
Daarvoor zijn verschillende constructiemogelijkheden. Maar we herkennen ook de analogie met de lenzenformule, met $a = OV$ =voorwerpsafstand, $b = OB$ = beeldafstand en $c = F_1F_2 = 2 \times$ brandpuntsafstand. Omdat deze formule en een bijbehorende constructie voor leerlingen met natuurkunde in hun pakket bekende stof is, hebben we hiervoor gekozen. Een bijkomstige aardigheid is dat deze constructie bij wiskundige behandeling van harmonisch gemiddelde zelden wordt gebruikt, zie figuur 4.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-6 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
J. Guichelaar	190	F. Göbel	123
R. Stolwijk	187	K. Vugs	105
K. van der Straaten	184	H. Klein	103
G. Bouwhuis	136	H. Bakker	99
J. Verbakel	128	J. Meerhof	97

We mogen Jan Guichelaar feliciteren met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2015

do 17/9
Jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

vr 18/9
EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

za 19/9
UTRECHT
Symposium WGRWO
Organisatie NVvW

za 7/11
VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW, zie ook pagina 51

vr 13/11
EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

LANDELIJK
Wiskunde A-lympiade/Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

2016

18/1 - 28/1
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 28/1
UTRECHT
Wiskunde conferentie vmbo en havo/vwo onderbouw
Organisatie APS in samenwerking met NVvW en SLO

wo 3/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

vr/za 5/2 6/2
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *vakbladeuclides.nl*

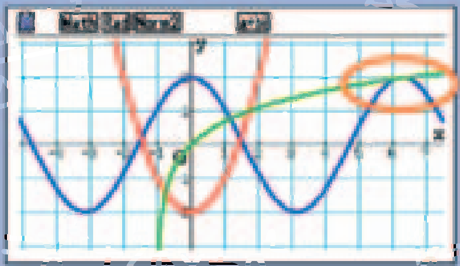
JAARGANG 91

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	3 november 2015	31 augustus 2015
3	17 december 2015	19 oktober 2015
4	2 februari 2016	23 november 2015
5	22 maart 2016	11 januari 2016
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016

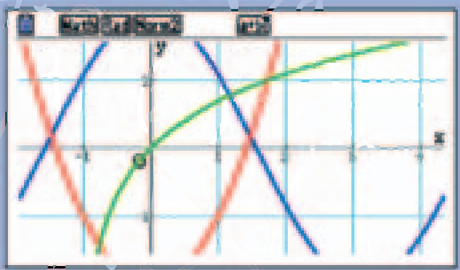
CASIO

Tien redenen om voor de **CASIO *fx*-CG20** te kiezen...

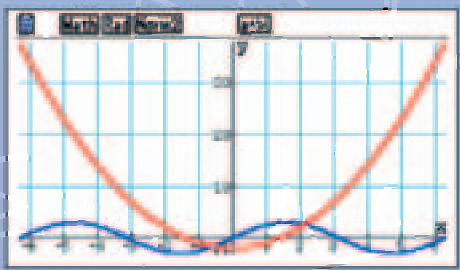
4. Verschuiven en zoomen:



Cursortoets verplaatst figuur zonder window-aanpassing.



Gebruik de plus- en mintoets voor snel-zoomen.



Bij zoom-fit wordt de schaal automatisch aangepast.



In de CASIO *fx*-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO *fx*-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO *fx*-CG20 Leelingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.

De CASIO *fx*-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Uw leerlingen kiezen voor de CASIO *fx*-CG20

Méér informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl

MODERNE WISKUNDE

Nieuw!
Leerwerkboeken
bij vmbo-basis



Moderne Wiskunde geeft uw leerlingen inzicht!

Noordhoff Uitgevers

Moderne Wiskunde 10e editie voor het vmbo:

- gebaseerd op nieuwe tussendoelen en referentieniveaus;
- perfecte afstemming tussen vmbo en havo/vwo;
- delen 4 vmbo beschikbaar voor schooljaar 2016-2017;
- sterk verbeterde ICT voor leerlingen en docenten.

Met *Moderne Wiskunde* bereidt u uw leerlingen optimaal voor op het eindexamen en het vervolgonderwijs!

Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!

Meer weten?
Ga naar www.modernewiskunde.noordhoff.nl

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent